RÉVISIONS SUR LES FONCTIONS NUMÉRIQUES

- Pour des problèmes de point fixe, le réflexe, c'est de poser $g : x \mapsto f(x) - x$.
- Le théorème de Rolle est d'usage courant mais seulement valable pour les fonctions à valeurs réelles. Il existe des extensions en ouvrant des bornes et en remplaçant les valeurs par les limites (voir exercice 4).
- De même, le théorème des accroissements finis n'est plus valable si la fonction n'est pas à valeurs réelles. Mais l'inégalité est valable dans un cadre beaucoup plus large. Par contre il faut alors se limiter à des majorations.
- Le théorème « de la dérivée » est un théorème du prolongement $\mathscr{C}^1$. Mais attention : on ne prolonge pas une dérivée, on prolonge la fonction et on obtient sa dérivabilité au point.
- Un développement limité à l'ordre 1 donne la dérivabilité (et la dérivée) en un point. Ce n'est plus vrai à partir de l'ordre 2.
- Pour démontrer des inégalités, il faut penser à la convexité.
- En général (et heureusement), les fonctions rencontrées sont dérivables voire deux fois dérivables. La monotonie de f' ou le signe de f'' permet alors de conclure plus facilement sur la convexité ou la concavité de f.
- La définition et les caractérisations de la convexité sont alors utilisées comme conséquences de celle-ci. Y penser pour les résultats plus théoriques en particulier.
- Parfois, le plus difficile est de reconnaître une inégalité de convexité. Penser par exemple à utiliser $\ln$ si l'inégalité se présente sous forme de produit.
- Attention aux manipulations d'inégalités avec des intégrales : des erreurs fréquentes sont dues à l'oubli de la vérification de l'ordre des bornes.
- Bien connaître, bien sûr, primitives usuelles et techniques de primitivation.
- On ne sait pas encore étudier des fonctions intégrales si la variable n'apparaît pas que dans les bornes de l'intégrale. On fera donc en sorte que ce soit le cas (par changement de variable si besoin), et il faut alors savoir étudier ce type de fonctions !
- La principale difficulté pour les sommes de Riemann est de les reconnaître. La convergence s'applique dans le cours pour des fonctions continues. On cherchera dans la pratique à reconnaître une somme du type $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0,1,2 \text{ ou } 12\dots}^{n-2,n-1 \text{ ou } n+45\dots} f\left(\frac{k}{n}\right)$ qui converge si f est continue sur $[0,1]$ vers $\displaystyle\int_0^1 f$.
- Les trois formules de Taylor sont à connaître PARFAITEMENT.

1. Exercices traités en cours

1 Montrer que la fonction $f : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = \begin{cases} \cos\dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}\end{array}\right.$ est discontinue toute en vérifiant la propriété des valeurs intermédiaires.

2 Montrer qu'un polynôme réel de degré impair admet au moins une racine réelle.

3 Étudier l'uniforme continuité des fonctions $x \mapsto ax + b$ (avec $a, b \in \mathbb{R}$), $|\cdot|$, $x \mapsto x^2$, $x \mapsto \dfrac{1}{x}$.

4 Montrer que $\sqrt{\cdot}$ est $\dfrac{1}{2}$-hölderienne : c'est-à-dire qu'il existe $k \in \mathbb{R}^+$ tel que pour tout $x, y \in \mathbb{R}^+$,

$$\left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right| \leqslant k\sqrt{|x-y|}.$$

En déduire l'uniforme continuité de $\sqrt{\cdot}$. Est-elle lipschitzienne ?

5 **CCINP 3 : Formule de Leibniz**

6 **CCINP 4 : théorème de la limite de la dérivée**

2. Continuité

7 Déterminer toutes les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continues en 0 telles que $\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(x+y) = f(x) + f(y)$.

8 Déterminer toutes les applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(x+y) = f(x)+f(y)$ et $f(xy) = f(x)f(y)$.

9 Un coureur parcourt 42 km en 4 heures. Montrer qu'il existe un intervalle de 2 heures pendant lequel il parcourt exactement 21 km.

L'exercice suivant permet de généraliser (ou non) ce type de raisonnement.

10 **Théorème de la corde universelle de Paul Lévy**

Soit f continue sur $[0,1]$ telle que $f(0) = f(1)$.

1. En utilisant $f\left(\dfrac{k}{n}\right)$, montrer que pour tout $n \geqslant 2$, il existe $x_n \in [0,1]$ tel que $f(x_n) = f\left(x_n + \dfrac{1}{n}\right)$.
2. En considérant sur $[0,1]$, la fonction $f : x \mapsto \sin^2\left(\dfrac{\pi x}{T}\right) - x\sin^2\left(\dfrac{\pi}{T}\right)$ où $T > 0$, montrer qu'on peut avoir $f(0) = f(1)$ sans qu'il existe de x tel que $f(x) = f(x+T)$.

11 Soit $[a,b]$ un segment stable par f continue. Montrer que f admet un point fixe dans $[a,b]$.

3. Uniforme continuité

12 Étudier l'uniforme continuité sur $\mathbb{R}_*^+$ de $\ln$ et $x \mapsto x\ln x$.

13 Montrer qu'une fonction T-périodique continue sur $\mathbb{R}$ est uniformément continue.

14 Soit $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}^+}$ continue telle que f admette une limite finie en $+\infty$. Montrer que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$.

4. Dérivabilité

Vrai ou faux

1. Un fonction dérivable à droite et à gauche en un point est dérivable en ce point.
2. Pour toute fonction dérivable sur $[a,b]$, il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$.
3. Si f est une fonction continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ à valeurs complexes telle que $f(a) = f(b)$, on peut appliquer le théorème de Rolle à $\mathfrak{Re}\, f$ et $\mathfrak{Im}\, f$ et en déduire que f' s'annule sur $]a,b[$.

15 Très classique (jusqu'à 4.)

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les racines d'un polynôme pour qu'il soit scindé à racines simples.
2. Soit $P\in\mathbb{R}[X]$ scindé simple avec $\deg P\geqslant 2$. Montrer que P' est scindé simple.
3. Est-ce encore vrai sur $\mathbb{C}[X]$?
4. Soit $P\in\mathbb{R}[X]$ scindé avec $\deg P\geqslant 2$. Montrer que P' est scindé.
5. **Oral X**
   (a) Avec les mêmes hypothèses montrer que plus généralement, si $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, $aP+bP'$ est scindé.
   (b) Montrer que si $P=\displaystyle\sum_{k=0}^{d}a_kX^k$ est scindé, $\displaystyle\sum_{k=0}^{d}a_kP^{(k)}$ est scindé.
   Indication : utiliser l'endomorphisme $P(D)$ où D est l'endomorphisme de dérivation.

16

Montrer que $\left((X^2-1)^n\right)^{(n)}$ est scindé à racines simples toutes dans $]-1,1[$.

17 Généralisations du théorème de Rolle

1. Si f est continue sur $[a,b[$, dérivable sur $]a,b[$ telle que $f(x)\xrightarrow[x\to b]{}f(a)$, à valeurs réelles, montrer que la conclusion du théorème de Rolle tient toujours.
2. Soit $f\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ dérivable et admettant une même limite (finie ou non) en $\pm\infty$. Montrer qu'il existe un réel c tel que $f'(c)=0$.
3. Soient $a\in\mathbb{R}$ et f continue sur $[a,+\infty[$, dérivable sur $]a,+\infty[$ telle que $f(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}f(a)$. Montrer qu'il existe $c\in]a,+\infty[$ tel que $f'(c)=0$.

18 Dérivées successives d'arctangente

Montrer que pour tout $n\geqslant 1$, $\mathrm{Arctan}^{(n)}: x\mapsto\dfrac{P_n(x)}{(1+x^2)^n}$ où P_n est une fonction polynomiale scindée simple.

19 Théorème de Darboux

Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction dérivable.

1. On suppose que $f'(a)$ et $f'(b)$ sont de signe contraire. Démontrer que f' s'annule sur $]a,b[$.
2. En déduire que la dérivée d'une fonction dérivable possède la propriété des valeurs intermédiaires.

20 Égalité de Taylor-Lagrange

Soit f de classe $\mathscr{C}^{(n+1)}$ sur I, $a,b\in I$. Montrer qu'il existe $c\in]a,b[$ tel que

$$f(b)=f(a)+f'(a)(b-a)+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}.$$

21 Erreur dans l'interpolation de Lagrange

Soit P_n polynôme d'interpolation de Lagrange interpolant une fonction f de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ aux points $(x_0=a,x_1,\dots,x_n=b)$.

1. Montrer que

$$\forall\,x\in[a,b],\quad\exists\,\xi_x\in[a,b],\quad f(x)-P_n(x)=\frac{(x-x_0)\cdots(x-x_n)}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi_x).$$

Indication : s'inspirer de la démonstration du théorème des accroissements finis.

2. En déduire, si l'on note $M_{n+1}(f)=\left\|f^{(n+1)}\right\|_\infty$ et $T(x)=(x-x_0)\cdots(x-x_n)$,

$$\left\|f-P_n\right\|_\infty\leqslant\frac{M_{n+1}(f)}{(n+1)!}\|T\|_\infty.$$

22 Fonctions plateau de classe $\mathscr{C}^\infty$

Le but de l'exercice est de construire des fonction « plateau » de classe $\mathscr{C}^\infty$ nulles hors d'un segment $[a,b]$ et valant 1 sur un segment inclus dans $]a,b[$.

1. **Très classique :** On définit, si $x>0$, $\phi(x)=\exp(-1/x)$. Montrer que ϕ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$ et que sa dérivée k^e est de la forme $x\mapsto P_k(1/x)\exp(-1/x)$ où P_k polynomiale.
   On prolonge ϕ à $\mathbb{R}$ en définissant, si $x\leqslant 0$, $\phi(x)=0$.
   Montrer que ϕ est de classe $\mathscr{C}^\infty$.
   Tracer l'allure du graphe de ϕ.
2. Tracer l'allure du graphe de $x\mapsto\phi(x+2)\phi(-1-x)$ puis de son unique primitive qui tends vers 0 en $-\infty$.
3. Construire ψ de classe $\mathscr{C}^\infty$, nulle en dehors de $[-2,2]$ et valant 1 sur $[-1,1]$.
4. Si $a<c<d<b$, comment construire une fonction $\mathscr{C}^\infty$, nulle en dehors de $[a,b]$ et valant 1 sur $[c,d]$?

5. Parties convexes

23 Enveloppe convexe

L'enveloppe convexe d'une partie A d'un espace vectoriel réel E est le plus petit convexe contenant A.

Comment l'exprimer à l'aide d'une intersection ?

24 Points extrémaux

Soit C une partie convexe d'un espace vectoriel E. On dit qu'un point x de C est extrémal lorsque :

$$\forall(a,b)\in C^2\qquad x\in[a,b]\Longrightarrow\big(x=a\quad\text{ou}\quad x=b\big)$$

Dessiner dans $\mathbb{R}^2$ un convexe ayant n points extrémaux, $n\geqslant 2$.
Dessiner dans $\mathbb{R}^2$ un convexe borné non vide n'ayant aucun point extrémal.
Existe-t-il dans $\mathbb{R}^2$ des parties qui ont un unique point extrémal ?

25 Théorème de Gauss-Lucas

Soit P un polynôme de degré au moins 2 de $\mathbb{C}[X]$. Démontrer que les racines de P' se trouvent dans l'enveloppe convexe des racines de P c'est-à-dire sont des barycentres à cœfficients positifs de celles-ci, soit encore des combinaisons linéaires à cœfficients positifs de somme 1.

On pourra s'intéresser à $\dfrac{P'}{P}$.

6. Fonctions convexes

26

1. Montrer que la composée (à gauche) d'une fonction convexe par une fonction convexe croissante est convexe.
2. Montrer qu'une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}_*^+$ dont la composée avec $\ln$ (à gauche) est convexe (on parle de fonction log-convexe) est une fonction convexe.

27 Soient I intervalle de $\mathbb{R}$, $f,g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ tels que $f \geqslant 0$, $g \geqslant 0$, f et g ont même monotonie et f et g sont convexes sur I. Montrer que fg est convexe sur I.

28 Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application continue strictement décroissante et convexe. Étudier la convexité de la fonction $f^{-1} : f(I) \to I$.

29 **Inégalité de Bernoulli** Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ \forall\, x \geqslant 0,\ \ x^{n+1} - (n+1)x + n \geqslant 0.$

30 Montrer que $\forall (x,y) \in]1,+\infty[^2$ on a : $\ln \dfrac{x+y}{2} \geqslant \sqrt{\ln x \ln y}$.

31 Soit f de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ deux fois dérivable telle que $f'' \leqslant 1$. Montrer que

$$f(0) - 2f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1) \leqslant \frac{1}{4}.$$

32 Montrer que parmi les polygones convexes inscrits dans un cercle donné, les polygones réguliers ont un périmètre maximal.

33 **Inégalité de Jensen continue (Oral CCINP - Écrit Centrale)**

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ et $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues, ϕ convexe. On suppose $a < b$. On veut montrer que

$$\phi\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right) \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b \phi\big(f(t)\big)\,\mathrm{d}t$$

1. Démontrer l'inégalité en utilisant des sommes de Riemann.
2. On suppose désormais ϕ de classe $\mathscr{C}^1$. Soit $\gamma \in \mathbb{R}$, montrer

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \phi(x) \geqslant \phi(\gamma) + (x-\gamma)\phi'(\gamma) \tag{1}$$

3. On applique (1) à $x = f(t)$, puis on intègre l'inégalité obtenue entre a et b. Comment choisir γ pour en déduire l'inégailté de Jensen ?
4. Ecrire l'inégalité de Jensen continue pour $\phi : x \longmapsto x^2$. Vérifier que le résultat peut s'obtenir grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
5. Ecrire l'inégalité de Jensen continue pour $\phi : x \longmapsto 1/x$: on supposera la fonction f à valeurs réelles strictement positives. Vérifier que le résultat peut (encore !) s'obtenir grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

34 Établir que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \ \forall\, x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_*^+,\ \ 1 + \left(\prod_{k=1}^n x_k\right)^{1/n} \leqslant \left(\prod_{k=1}^n (1+x_k)\right)^{1/n}.$

En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbb{R}_*^+$,

$$\left(\prod_{k=1}^n a_k\right)^{1/n} + \left(\prod_{k=1}^n b_k\right)^{1/n} \leqslant \left(\prod_{k=1}^n (a_k+b_k)\right)^{1/n}.$$

35 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe et majorée. Montrer que f est constante. (*On pourra raisonner par l'absurde.*) Le résultat est-il vrai si f définie sur $\mathbb{R}^+$?

36 Soit f définie sur $\mathbb{R}^+$ convexe, croissante, non constante. Montrer que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.

37 **Branche infinie d'une fonction convexe** Soit $f : \mathbb{R}_*^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ convexe.

1. Montrer que $x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$ tend vers une limite finie ou $+\infty$ en $+\infty$.
2. Montrer que si $\dfrac{f(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell \in \mathbb{R}$, alors $x \mapsto f(x) - \ell x$ tend vers une limite finie ou $-\infty$ en $+\infty$.

7. Intégrales sur des segments

A. Calculs de primitives et d'intégrales

38 Déterminer les primitives de fonctions données par les expressions suivantes, en précisant les intervalles de validité :

1. $(t+1)\operatorname{ch} t$
2. $t\sin^3 t$
3. $\dfrac{1}{\sqrt{t}+\sqrt[3]{t}}$
4. $\dfrac{\ln t}{t + t\ln^2 t}$
5. $\dfrac{t^5}{1+t^{12}}$
6. $\dfrac{1}{t(t^2-1)}$
7. $\dfrac{1}{t^2 \pm 2t + 2}$
8. $\dfrac{t^4+1}{t^4-1}$
9. $\dfrac{1}{\mathrm{e}^t+1}$
10. $\dfrac{1}{\sqrt{1+\mathrm{e}^{2t}}}$
11. $\dfrac{\cos t}{1+\cos^2 t}$
12. $\dfrac{1}{\cos^3 t}$
13. $\dfrac{t}{1+\sqrt{t+1}}$
14. $\dfrac{1-\sqrt{t}}{1+\sqrt{t}}$
15. $\dfrac{t+1}{\sqrt{2-t^2}}$
16. $\dfrac{1}{t+\sqrt{1+t^2}}$
17. $\dfrac{t}{\sqrt{(t-1)(3-t)}}$
18. $\dfrac{\operatorname{ch} t}{1+\operatorname{ch}^2 t}$
19. $\dfrac{1}{\operatorname{ch}^3 t}$
20. $\dfrac{\operatorname{ch} t}{\operatorname{sh} t + \operatorname{ch} t}$

39 Calculer les intégrales suivantes

1. $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}^\pi} \sin(\ln t)\,\mathrm{d}t$
2. $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{3+\cos^2 t}\,\mathrm{d}t$
3. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{2+\cos t}$
4. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{1+\sin t\cos t}$
5. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{Arctan} t}{(t+1)^2}\,\mathrm{d}t$
6. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\operatorname{ch} t}$
7. $\displaystyle\int_0^1 \frac{t}{t^3+1}\,\mathrm{d}t$
8. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t}+\sqrt{1-t}}$

B. Manipulations d'intégrales

40 Soit $f \in \mathscr{C}([0,1])$ telle que $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$. Montrer que f admet un point fixe.

41 Soit $f : [0,+\infty[\to [0,+\infty[$ de classe $\mathscr{C}^1$. On suppose que $\dfrac{f'(x)}{f(x)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \alpha \in \mathbb{R}$. Étudier la limite en $+\infty$ de $\dfrac{f(x+1)}{f(x)}$.

42 Montrer que $(I_n)_n = \left(\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{1+u^n}\right)_n$ converge vers une limite ℓ et donner un équivalent de $I_n - \ell$.

43 Intégrales de Wallis

On pose $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t \, dt$ et $J_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n t \, dt$.

1. Comparer I_n et J_n.
2. Trouver une relation de récurrence vérifiée par (I_n).
3. En déduire une expression de I_n.
4. Étudier la monotonie de (I_n).
5. Que dire de la suite (nI_nI_{n-1}) ?
6. Montrer que $I_{n-2} \sim I_n$ puis que $I_{n-1} \sim I_n$.
7. En déduire un équivalent de I_n.

44 Lemme de Riemann-Lebesgue

Soit f une fonction continue par morceaux sur un segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ à valeurs complexes. On veut montrer que $\int_a^b f(t)\sin(nt)\,dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

1. Montrer le résultat si f est de classe $\mathscr{C}^1$.
2. Montrer le résultat pour f continue en utilisant des fonctions polynomiales.
3. Montrer le résultat si f en escalier, puis continue par morceaux.

On peut remplacer $\sin(nt)$ *par* $\cos(nt)$ *ou* e^{int}.

45

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un segment $[a,b]$ à valeurs réelles, telle que $f(a)=0$.

1. Montrer que pour tout $t \in [a,b]$, $(f(t))^2 \leqslant (t-a)\int_a^t (f'(u))^2\,du$.
2. En déduire que $\int_a^b (f(t))^2\,dt \leqslant \frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b (f'(u))^2\,du$.

C. Intégrale dépendant des bornes

46

Pour tout $x \in \mathbb{R}_*^+$, on pose $I(x) = \int_{1/x}^{x} \frac{t\ln t}{(1+t^2)^2}\,dt$. Calculer $I(x)$ pour $x>0$ de trois manières différentes :

1. Changement de variable $t = \frac{1}{u}$ 2. Intégration par parties 3. Étude de la fonction I

47

Soit φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(t) = \frac{\operatorname{sh} t}{t}$ si $t \neq 0$ et $\varphi(0)=1$ et $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \int_x^{2x} \varphi(t)\,dt \end{array} \right.$.

1. Montrer que f est bien définie et étudier sa parité.
2. Justifier que f est dérivable et calculer f'.
3. Dresser le tableau de variations de f.
4. Déterminer la limite en $+\infty$ de f et la branche infinie correspondante.
5. Déterminer un équivalent en $+\infty$ et retrouver le résultat de la question précédente.
6. Effectuer un développement limité à l'ordre 3 en 0 de f.
7. Tracer le graphe de f.

D. Sommes de Riemann

48

Étudier convergence et limite des suites de terme général

1. $\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n^2}\cos\frac{k\pi}{n}$ 2. $\sum_{k=0}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}$ 3. $\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n^2+k^2}$ 4. $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+2kn}}$ 5. $\sum_{k=0}^{n} \frac{k^2}{n^3+nk^2}$ 6. $\left(\frac{(2n)!}{n^n n!}\right)^{\frac{1}{n}}$

49

Déterminer un équivalent simple de $S_n = \sum_{k=0}^{n} \sqrt{k}$.

50 Oral Centrale

On désigne par z un nombre complexe de module différent de 1 ; on pose pour tout entier naturel k, $I_k = \int_0^{2\pi} \frac{e^{ikt}}{z-e^{it}}\,dt$.

1. Calculer, pour k entier naturel non nul, $I_k - zI_{k-1}$.
2. Calculer I_0 à l'aide de sommes de Riemann.
3. Calculer I_k pour tout k.
   Remarque : on pourrait calculer cette intégrale en multipliant numérateur et dénominateur par la quantité conjuguée de celui-ci et en séparant partie réelle et partie imaginaire... mais ce serait certainement laborieux !
4. Faire dans I_1 le « changement de variable » $u = e^{it}$. Qu'en penser ?

E. Formules de Taylor

51

Soit $f \in \mathbb{K}^{\mathbb{R}}$ deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que f et f'' sont bornées. On note $M_0 = \|f\|_\infty$ et $M_2 = \|f''\|_\infty$.

1. Montrer que $\forall h>0,\ \forall x\in\mathbb{R},\ |f'(x)| \leqslant \frac{M_0}{h} + \frac{M_2 h}{2}$.
2. En déduire que f' est bornée, et, en notant $M_1 = \|f'\|_\infty$, $M_1 \leqslant \sqrt{2M_0M_2}$.

52

Soit $(a,b)\in R^2$ tel que $a<b$. Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ telle que $f(a)=f(b)=0$.

1. Justifier l'existence de $M = \sup_{[a,b]}|f''|$.
2. Soit $x\in[a,b]$. En appliquant à f la formule de Taylor avec reste intégrale sur $[x,a]$, puis sur $[x,b]$, montrer que $|f(x)| \leqslant \frac{M}{2}(b-x)(x-a)$.
3. En déduire que $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \frac{M(b-a)^3}{12}$.

53

Soit $a\in\mathbb{R}$, $r\in\mathbb{R}_+^*$ et $f:[a-r,a+r]\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^3$.

Calculer la limite de $\frac{1}{h^3}\big(f(a+3h)-3f(a+2h)+3f(a+h)-f(a)\big)$ lorsque $h\to 0$.