Sauf mention contraire, $\mathbb{K}$ désigne un sous-corps de $\mathbb{C}$, et n un entier naturel non nul.

1. Exercices cherchés en cours

1 Montrer que tout projection peut être représentée par un matrice de la forme $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et que toute symétrie peut être représentée par un matrice de la forme $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & -I_{n-r} \end{pmatrix}$.

2 Soit $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Déterminer le rang de $M = \begin{pmatrix} A & A \\ A & B \end{pmatrix}$.
2. Calculer l'inverse de M lorsque c'est possible.

Solution de 2 :

1. Par opérations élémentaires, M est équivalente à $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B-A \end{pmatrix}$: $\operatorname{rg} M = \operatorname{rg} A + \operatorname{rg}(B-A)$ en s'intéressant aux endomorphismes induits ou en échelonnant les blocs diagonaux ou en utilisant des matrices J_r.
2. Résoudre $M\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}$ avec A et $B-A$ inversibles.

3 Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

1. Soit $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + 2z = 0\}$. Montrer que H est stable par u.
2. Soit $x = (3, 2, 1)$ et $D = \operatorname{Vect}(x)$. Montrer que D est stable par u.
3. Justifier que $\mathbb{R}^3 = D \oplus H$.
4. Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans la quelle la matrice de u est diagonale par blocs, à cœfficients entiers.

4 Montrer $(x \mapsto e^{\lambda x})_{\lambda \in \mathbb{R}}$ et $(x \mapsto \cos(\lambda x))_{\lambda \in \mathbb{R}^+}$ sont des familles libres.

5 **CCINP 83 : Valeur propre de composée**

Solution de 5 : CCINP 83 : Valeur propre de composée

1. Soit $\lambda \neq 0$.
   Si λ valeur propre de $u \circ v$ alors $\exists\, x \in E \setminus \{0\} / (u \circ v)(x) = \lambda x$. $(*)$

   Pour un tel x non nul, on a alors $v(u \circ v(x)) = \lambda v(x)$ c'est-à-dire $(v \circ u)(v(x)) = \lambda v(x)$ $(**)$.
   Si $v(x) = 0$ alors, d'après $(*)$, $\lambda x = 0$. Ce qui est impossible car $x \neq 0$ et $\lambda \neq 0$.
   Donc $v(x) \neq 0$.
   Donc, d'après $(**)$, $v(x)$ est un vecteur propre de $v \circ u$ associé à la valeur propre λ.
2. On trouve que $v \circ u = \mathrm{Id}$ et $u \circ v : P \longmapsto P(X) - P(1)$.
   Ainsi $\operatorname{Ker}(v \circ u) = \{0\}$ et $\operatorname{Ker}(u \circ v) = \mathbb{R}_0[X]$.
   On observe que 0 est valeur propre de $u \circ v$ mais n'est pas valeur propre de $v \circ u$.
   On constate donc que le résultat de la question 1. est faux pour $\lambda = 0$.

3. Si E est de dimension finie, comme $\det(u \circ v) = \det u \det v = \det(v \circ u)$ alors :
0 est valeur propre de $u \circ v \iff \det(u \circ v) = 0 \iff \det(v \circ u) = 0 \iff$ 0 est valeur propre de $v \circ u$.
Remarque 1 : le résultat de la question 1. est vrai pour $\lambda = 0$ si et seulement si E est de dimension finie.

Remarque 2 : Si E est de dimension finie, $u \circ v$ et $v \circ u$ ont les mêmes valeurs propres.

6

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que A et $A^\intercal$ ont même polynôme caractéristique.

7

Montrer qu'en dimension impaire, un matrice réelle a toujours au moins une valeur propre réelle.

8 CCINP 72 : Endomorphismes de rang 0 ou 1

Solution de 8 : CCINP 72 : Endomorphismes de rang 0 ou 1

1. Si $v = 0_E$ alors f est l'endomorphisme nul et donc $\mathrm{rg} f = 0$.
Si $v \neq 0$ alors $\mathrm{rg} f = 1$ car, si on note $c_1, c_2, ..., c_n$ les colonnes de la matrice A de f dans la base canonique e, alors $c_1 \neq 0$ et $c_1 = c_2 = ... = c_n$.
2. **Premier cas** : $v = 0_E$
alors f est l'endomorphisme nul et donc f est diagonalisable.
Deuxième cas : $v \neq 0_E$.

Alors rg$f = 1$ et donc $\dim \mathrm{Ker} f = n-1$.
Donc 0 est valeur propre de f et, si on note m_0 l'ordre de multiplicité de la valeur propre 0 dans le polynôme caractéristique de f, alors $m_0 \geqslant n-1$.
On en déduit alors que : $\exists \lambda \in \mathbb{K} \,/\, P_f(X) = X^{n-1}(X-\lambda)$. **(*)**
Et donc, $\mathrm{tr}(f) = \lambda$.
e est une base de E donc : $\exists!(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{K}^n \,/\, v = x_1 e_1 + x_2 e_2 + ... + x_n e_n$.
En écrivant la matrice de f dans la base e, on obtient alors $\mathrm{tr}(f) = x_1 + x_2 + ... + x_n$.
Ainsi, $\lambda = x_1 + x_2 + ... + x_n$. **(**)**
Ce qui amène à la discussion suivante :
Premier sous- cas : si $x_1 + x_2 + ... + x_n \neq 0$

D'après (*) et (**), $\lambda = x_1 + x_2 + ... + x_n$ est une valeur propre non nulle de f et $\dim E_\lambda = 1$.
Ainsi, $\dim E_0 + \dim E_\lambda = n$ et donc f est diagonalisable.
Deuxième sous- cas : si $x_1 + x_2 + ... + x_n = 0$

Alors, d'après (*) et (**), $P_f(X) = X^n$.
Donc 0 est valeur propre d'ordre de multiplicité n dans le polynôme caractéristique.
Or $\dim E_0 = n-1$.
Donc f n'est pas diagonalisable.
Remarque dans le cas où $v \neq 0$

Comme $v = x_1 e_1 + x_2 e_2 + ... + x_n e_n$, alors, par linéarité de f, $f(v) = x_1 f(e_1) + x_2 f(e_2) + ... + x_n f(e_n)$.
C'est-à-dire, $f(v) = (x_1 + x_2 + ... + x_n)v$. **(***)**
On en déduit que : $x_1 + x_2 + ... + x_n = 0 \iff f(v) = 0$.
De plus, dans le cas où $x_1 + x_2 + ... x_n \neq 0$, alors, d'après (***), v est un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda = x_1 + x_2 + ... + x_n$ et d'après ce qui précéde, $E_f(\lambda) = \mathrm{Vect}(v)$.

9

Que peut-on dire d'une matrice diagonalisable ayant une unique valeur propre ?

10

Diagonaliser $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

11 CCINP 67 : Diagonalisation dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Solution de 11 : CCINP 67 : Diagonalisation dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

$\chi_M(X) = \det(XI_3 - M)$.
Après calculs, on trouve, $\chi_M(X) = X(X^2 + ca - ba - bc)$.
Premier cas : $ca - ba - bc < 0$

M est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ car M possède trois valeurs propres réelles distinctes.
Elle est, a fortiori, diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.
Deuxième cas : $ca - ba - bc = 0$

Alors, 0 est la seule valeur propre de M.
Ainsi, si M est diagonalisable, alors M est semblable à la matrice nulle c'est-à-dire $M = 0$ ou encore $a = b = c = 0$.
Réciproquement, si $a = b = c = 0$ alors $M = 0$ et donc M est diagonalisable.
On en déduit que M est diagonalisable si et seulement si $a = b = c = 0$.
Troisième cas : $ca - ba - bc > 0$

Alors 0 est la seule valeur propre réelle et donc M n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ car $\chi_M(X)$ n'est pas scindé sur $\mathbb{R}[X]$.
En revanche, M est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ car elle admet trois valeurs propres complexes distinctes.

12 CCINP 59 : Endomorphisme de polynômes

Solution de 12 : CCINP 59 : Endomorphisme de polynômes

1. f est clairement linéaire. (*) De plus, $\forall P \in E \setminus \{0\}$, $\deg P' < \deg P$ donc $\deg(P - P') = \deg P$.
   Et, si $P = 0$, alors $P - P' = 0$ donc $\deg(P - P') = \deg P = -\infty$.
   On en déduit que $\forall P \in E$, $\deg f(P) = \deg P$.
   Donc $f(E) \subset E$. (**)
   D'après (*) et (**), f est bien un endomorphisme de E.

   (a) Déterminons $\operatorname{Ker} f$.
   Soit $P \in \operatorname{Ker} f$.
   $f(P) = 0$ donc $P - P' = 0$ donc $\deg(P - P') = -\infty$.
   Or, d'après ce qui précède, $\deg(P - P') = \deg P$ donc $\deg P = -\infty$.
   Donc $P = 0$.
   On en déduit que $\operatorname{Ker} f = \{0\}$.

   Donc f est injectif.
   Or, $f \in \mathcal{L}(E)$ et E est de dimension finie $(\dim E = n + 1)$ donc f est bijectif.

   (b) Soit $e = (1, X, ..., X^n)$ la base canonique de E. Soit A la matrice de f dans la base e.
   $$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & & (0) \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & -n \\ (0) & & & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R}).$$
   $\det A = 1$ d'où $\det A \neq 0$.
   Donc f est bijectif.

2. Soit $Q \in E$.
   D'après 1. : $\exists! P \in E$, tel que $f(P) = Q$.
   $P - P' = Q$, $P' - P'' = Q'$,..., $P^{(n)} - P^{(n+1)} = Q^{(n)}$.
   Or $P^{(n+1)} = 0$, donc, en sommant ces $n + 1$ égalités, $P = Q + Q' + \cdots + Q^{(n)}$.

3. Reprenons les notations de 1.(b).
   Tout revient à se demander si A est diagonalisable.
   Notons $P_A(X)$ le polynôme caractéristique de A.
   D'après 1.(b), on a $P_A(X) = (X - 1)^{n+1}$.
   Donc 1 est l'unique valeur propre de A.
   Ainsi, si A était diagonalisable, alors A serait semblable à la matrice unité I_{n+1}.
   On aurait donc $A = \mathrm{I}_{n+1}$.
   Ce qui est manifestement faux car $f \neq \mathrm{Id}$.
   Donc A n'est pas diagonalisable et par conséquent, f n'est pas diagonalisable.

13 CCINP 69 : Rang et diagonalisabilité

Solution de 13 : CCINP 69 : Rang et diagonalisabilité

1. Après calcul, on trouve $\det A = a(a+1)$.
   Premier cas : $a \neq 0$ et $a \neq -1$
   Alors, $\det A \neq 0$ donc A est inversible.
   Donc $\text{rg} A = 3$.
   Deuxième cas : $a = 0$
   $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ donc $\text{rg} A = 2$.

   Troisième cas : $a = -1$
   $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ donc $\text{rg} A \geqslant 2$ car les deux premières colonnes de A sont non colinéaires.

   Or $\det A = 0$ donc $\text{rg} A \leqslant 2$.
   On en déduit que $\text{rg} A = 2$.
2. Notons χ_A le polynôme caractéristique de A.
   $\det(\lambda I_n - A) = \begin{vmatrix} \lambda & -a & -1 \\ -a & \lambda & -1 \\ -a & -1 & \lambda \end{vmatrix}$
   Alors, en ajoutant à la première colonne la somme des deux autres puis, en soustrayant la première ligne aux deux autres lignes, on trouve successivement :
   $\det(\lambda I_n - A) = (\lambda - a - 1)\begin{vmatrix} 1 & -a & -1 \\ 1 & \lambda & -1 \\ 1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - a - 1)\begin{vmatrix} 1 & -a & -1 \\ 0 & \lambda + a & 0 \\ 0 & -1+a & \lambda+1 \end{vmatrix}$.
   Donc, en développant par rapport à la première colonne,
   $\det(\lambda I_n - A) = (\lambda - a - 1)(\lambda + a)(\lambda + 1)$.
   Donc $\chi_A = (X - a - 1)(X + a)(X + 1)$.
   Les racines de χ_A sont $a+1$, $-a$ et -1.
   $a + 1 = -a \iff a = -\dfrac{1}{2}$.
   $a + 1 = -1 \iff a = -2$.
   $-a = -1 \iff a = 1$.
   Ce qui amène aux quatre cas suivants :

   Premier cas : $a \neq 1$, $a \neq -2$ et $a \neq -\dfrac{1}{2}$
   Alors A admet trois valeurs propres disctinctes.
   Donc A est diagonalisable.
   Deuxième cas : $a = 1$
   $\chi_A = (X-2)(X+1)^2$.
   Alors A est diagonalisable si et seulement si $\dim E_{-1} = 2$, c'est-à-dire $\text{rg}(A + \mathrm{I}_3) = 1$.
   Or $A + \mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ donc $\text{rg}(A + \mathrm{I}_3) = 1$.
   Donc A est diagonalisable.
   Troisième cas : $a = -2$
   Alors, $\chi_A = (X+1)^2(X-2)$.
   $A + \mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
   Les deux premières colonnes de $A + \mathrm{I}_3$ ne sont pas colinéaires, donc $\text{rg}(A + \mathrm{I}_3) \geqslant 2$.
   De plus, -1 est valeur propre de A, donc $\text{rg}(A + \mathrm{I}_3) \leqslant 2$.
   Ainsi, $\text{rg}(A + \mathrm{I}_3) = 2$ et $\dim E_{-1} = 1$.
   Or l'ordre multiplicité de la valeur propre -1 dans le polynôme caractéristique est 2.
   On en déduit que A n'est pas diagonalisable.

Quatrième cas : $a=-\dfrac{1}{2}$

$\chi_A=(X-\dfrac{1}{2})^2(X+1)$.

$A-\dfrac{1}{2}\mathrm{I}_3=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1\\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1\\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

Les deux premières colonnes de $A-\dfrac{1}{2}\mathrm{I}_3$ sont non colinéaires, donc $\mathrm{rg}(A-\dfrac{1}{2}\mathrm{I}_3)\geqslant 2$.

De plus, $\dfrac{1}{2}$ est valeur propre donc $\mathrm{rg}(A-\dfrac{1}{2}\mathrm{I}_3)\leqslant 2$.

Ainsi, $\mathrm{rg}(A-\dfrac{1}{2}\mathrm{I}_3)=2$ et $\dim E_{\frac{1}{2}}=1$.

Or l'ordre de multiplicité de la valeur propre $\dfrac{1}{2}$ dans le polynôme caractéristique est 2.

On en déduit que A est non diagonalisable.

14 CCINP 70 : Réduction de matrice circulante

Solution de 14 : CCINP 70 : Réduction de matrice circulante

1. $\chi_A(X)=(X^3-1)$ donc $\mathrm{Sp}A=\{1,j,j^2\}$.
   On en déduit que A est diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ car elle admet trois valeurs propres distinctes.
   On pose $E_1(A)=\mathrm{Ker}(A-\mathrm{I}_3)$, $E_j(A)=\mathrm{Ker}(A-j\mathrm{I}_3)$ et $E_{j^2}(A)=\mathrm{Ker}(A-j^2\mathrm{I}_3)$.

   Après résolution, on trouve $E_1(A)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ et $E_j(A)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\j^2\\j\end{pmatrix}\right)$.

   Et, par conjugaison (comme A est à coefficients réels), $E_{j^2}(A)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\j\\j^2\end{pmatrix}\right)$.

2. Soit $e=(e_1,e_2,e_3)$ la base canonique de $\mathbb{C}^3$, vu comme un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.
   Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à A.

   On pose $e_1'=(1,1,1)$, $e_2'=(1,j^2,j)$, $e_3'=(1,j,j^2)$ et $e'=(e_1',e_2',e_3')$.
   D'après 1., e' est une base de vecteurs propres pour f.

   Soit P la matrice de passage de e à e'. On a $P=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&j^2&j\\1&j&j^2\end{pmatrix}$. Soit $D=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&j&0\\0&0&j^2\end{pmatrix}$.

   Alors, $D=P^{-1}AP$, c'est-à-dire $A=PDP^{-1}$.
   On en déduit que $B=a\mathrm{I}_3+bPDP^{-1}+cPD^2P^{-1}=P\left(aI_3+bD+cD^2\right)P^{-1}$.

   C'est-à-dire, si on pose $Q=a+bX+cX^2$, alors $B=P\begin{pmatrix}Q(1)&0&0\\0&Q(j)&0\\0&0&Q(j^2)\end{pmatrix}P^{-1}$.

   On en déduit que B est diagonalisable et que les valeurs propres, distinctes ou non, de B sont $Q(1)$, $Q(j)$ et $Q(j^2)$.
   Premier cas : $Q(1)$, $Q(j)$ et $Q(j^2)$ sont deux à deux distincts

   B possède trois valeurs propres distinctes : $Q(1)$, $Q(j)$ et $Q(j^2)$.

   De plus, on peut affirmer que :

   $E_{Q(1)}(B)=E_1(A)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ $E_{Q(j)}(B)=E_j(A)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\j^2\\j\end{pmatrix}\right)$ et $E_{Q(j^2)}(B)=E_{j^2}(A)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\j\\j^2\end{pmatrix}\right)$.

   Deuxième cas : deux valeurs exactement parmi $Q(1)$, $Q(j)$ et $Q(j^2)$ sont égales.
   Supposons par exemple que $Q(1)=Q(j)$ et $Q(j^2)\neq Q(1)$.

   B possède deux valeurs propres distinctes : $Q(1)$ et $Q(j^2)$.
   De plus, on peut affirmer que :

$E_{Q(1)}(B)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\j^2\\j\end{pmatrix}\right)$ et $E_{Q(j^2)}(B)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\j\\j^2\end{pmatrix}\right)$.

Troisième cas : $Q(1)=Q(j)=Q(j^2)$.
B possède une unique valeur propre : $Q(1)$.

De plus, on peut affirmer que $B=Q(1)\mathrm{I}_3$ et $E_{Q(1)}(B)=\mathbb{C}^3$.

15 **Matrices compagnes** Calculer le polynôme caractéristique de la matrice compagne ($a_0,\dots,a_{n-1}\in\mathbb{K}$)

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1 & & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & 1\\ a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1}\end{pmatrix}.$$

Vérifier que ses sous-espaces propres sont des droites puis montrer qu'elle est diagonalisable si et seulement si le polynôme caractéristique est scindé simple.

16 Trouver le terme général des suites x,y,z telles que pour tout n, $\begin{cases}x_{n+1}=y_n+z_n\\ y_{n+1}=x_n+z_n\\ z_{n+1}=x_n+y_n\end{cases}$

Solution de 16 :

On pose $X_n=\begin{pmatrix}x_n\\y_n\\z_n\end{pmatrix}$, alors $X_{n+1}=AX_n$ donc pour tout n, $X_n=A^nX_0$.

Or $A=PDP^{-1}$ avec $D=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$, $P=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&0&1\\0&-1&1\end{pmatrix}$. On calcule $P^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&-2&1\\1&1&-2\\1&1&1\end{pmatrix}$.

On en déduit que pour tout $n\in\mathbb{Z}$, $A^n=P\begin{pmatrix}(-1)^n&0&0\\0&(-1)^n&0\\0&0&2^n\end{pmatrix}P^{-1}$ et donc $A^n=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}2^n+2(-1)^n & 2+(-1)^{n+1} & 2+(-1)^{n+1}\\ 2+(-1)^{n+1} & 2^n+2(-1)^n & 2+(-1)^{n+1}\\ 2+(-1)^{n+1} & 2+(-1)^{n+1} & 2^n+2(-1)^n\end{pmatrix}$.

D'où x_n,y_n,z_n exprimés en fonction de x_0,y_0,z_0.
On peut même calculer le résultat sans calculer P^{-1} !

Si on pose $Y_n=P^{-1}X_n$, $Y_{n+1}=DY_n$ donc $Y_n=D^nY_0$ et donc $X_n=\begin{pmatrix}x_n\\y_n\\z_n\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}(-1)^n&0&0\\0&(-1)^n&0\\0&0&2^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda\\\mu\\\nu\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(-1)^n(\lambda+\mu)+2^n\nu\\(-1)^{n+1}\lambda+2^n\mu\\(-1)^{n+1}\mu+2^n\nu\end{pmatrix}$.

17 Trouver le commutant de $A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$.

18 **CCINP 73 : Commutant d'une matrice 2×2**

Solution de 18 : CCINP 73 : Commutant d'une matrice 2×2

1. On obtient le polynôme caractéristique $\chi_A=(X-3)(X+2)$ et donc $\mathrm{Sp}A=\{-2,3\}$.
   Après résolution des équations $AX=3X$ et $AX=-2X$, on obtient :
   $E_3=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)$ et $E_{-2}=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}\right)$.
2. Soit $N=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$.
   $ND=DN\iff\begin{cases}-2b&=&3b\\3c&=&-2c\end{cases}\iff b=c=0\iff N$ diagonale.
   On a $A=PDP^{-1}$ avec $P=\begin{pmatrix}1&1\\1&-4\end{pmatrix}$ et $D=\begin{pmatrix}3&0\\0&-2\end{pmatrix}$.

   Soit $M\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

   $AM=MA\Leftrightarrow PDP^{-1}M=MPDP^{-1}\Leftrightarrow D(P^{-1}MP)=(P^{-1}MP)D\Leftrightarrow P^{-1}MP$ commute avec D.
   C'est-à-dire, $AM=MA\Leftrightarrow P^{-1}MP=\begin{pmatrix}a&0\\0&d\end{pmatrix}\Leftrightarrow M=P\begin{pmatrix}a&0\\0&d\end{pmatrix}P^{-1}$.

Donc, l'espace des matrices commutant avec A est $C(A)=\left\{P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}P^{-1} \text{ avec } (a,d)\in\mathbb{R}^2\right\}$.
C'est un plan vectoriel.
De plus, pour des raisons d'inclusion ($\mathrm{I}_2\in C(A)$ et $A\in C(A)$) et d'égalité des dimensions, $C(A)=\mathrm{Vect}(\mathrm{I}_2,A)$.

19 Trouver les racines carrées de $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Solution de 19 :

$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, semblable à $D=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Pour $\mathbb{K}=\mathbb{R}$.
$\mathscr{C}(D)=\left\{\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ d & e & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix},\ a,b,c,d,i\in\mathbb{R}\right\}$.
$N=\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ d & e & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$ racine de D ssi $\begin{pmatrix} a^2+bd & b(a+e) & 0 \\ d(a+e) & e^2+bd & 0 \\ 0 & 0 & i^2 \end{pmatrix}=D$
Mais si on a $a+e\neq 0$, alors $b=d=0$ et $a^2=-1$ ce qui n'est pas possible sur $\mathbb{R}$.
Donc N racine de D si et seulement si $e=-a$, $a^2+bd=-1$ et $j^2=2$.
$\mathscr{R}(A)=\left\{P\begin{pmatrix} s\sqrt{-1-bd} & b & 0 \\ d & -s\sqrt{-1-bd} & 0 \\ 0 & 0 & t\sqrt{2} \end{pmatrix}P^{-1};\ b,d\in\mathbb{R};\ bd\leqslant -1; s,t\in\{-1,1\}\right\}$.

20 Déterminer le terme général des suites complexes vérifiant $\forall\, n\in\mathbb{N},\ \ u_{n+3}=-u_{n+2}-u_{n+1}-u_n$ en posant $X_n=\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$.

21 $A=\begin{pmatrix} -7 & 1 \\ -9 & -1 \end{pmatrix}$

1. A est-elle trigonalisable ? Diagonalisable ?
2. Trigonaliser (resp. diagonaliser) A si elle est trigonalisable (resp. diagonalisable).

2. Éléments propres et diagonalisation

22

1. Pour quelles valeurs de $a\in\mathbb{R}$ la matrice $A=\begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ a^2-7a & a-7 & a \end{pmatrix}$ admet-elle une valeur propre double ? Pour ces valeurs, A est-elle diagonalisable ?
2. Soit $M=\begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ -10 & -5 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer M^n pour $n\in\mathbb{N}$.

23 Soit $A=\begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Diagonaliser A.
2. En déduire A^n pour tout $n\in\mathbb{N}$.
3. Déterminer le terme général des suites x, y, z définies par $x_0=1$, $y_0=0$, $z_0=0$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$ $\left\{\begin{array}{lcl} x_{n+1} & = & 4x_n-2(y_n+z_n) \\ y_{n+1} & = & x_n-z_n \\ z_{n+1} & = & 3x_n-2y_n-z_n \end{array}\right.$

24 Quelles sont les matrices élémentaires $E_{i,j}\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalisables ?

25 Soit $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer $\operatorname{Ker} A$ et $\operatorname{Im} A$.
2. Diagonaliser A.
3. En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

26 Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que tout vecteur non nul x soit un vecteur propre. Que dire de u ?

27 Déterminer le commutant et les racines carrées de la matrice $A=\begin{pmatrix} 8 & -10 & 10 \\ 2 & -1 & 2 \\ -3 & 6 & -5 \end{pmatrix}$.

28 Montrer que $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable si et seulement si $A^\intercal$ l'est.

29 Déterminer les valeurs propres de la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ $M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & & (0) \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & (0) & & 1 \end{pmatrix}$

30 On souhaite démontrer que si $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

1. Montrer le résultat si on suppose de plus que $A \in \mathscr{GL}(\mathbb{K})$.
2. En déduire le résultat si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ en utilisant l'exercice suivant.
3. Retrouver le résultat dans le cas général en calculant le produit dans les deux sens de $\begin{pmatrix} A & XI_n \\ I_n & (0) \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -B & XI_n \\ I_n & -A \end{pmatrix}$.

31 **Densité de $\mathscr{GL}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$** Montrer que si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, alors pour $\lambda \in \mathbb{K}$ suffisamment proche de 0, $A-\lambda I_n \in \mathscr{GL}_n(\mathbb{K})$. En déduire que toute matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est limite d'une suite de matrices de $\mathscr{GL}_n(\mathbb{K})$ au sens où $A^{(k)} \xrightarrow[k\to+\infty]{} A$ lorsque pour tout (i,j), $a_{i,j}^{(k)} \to a_{i,j}$.

Retrouver le résultat en exploitant le fait que tout matrice de rang r est équivalente à J_r.

32 **Matrices circulantes** Soit $n \geqslant 2$.

1. Montrer que la matrice $J=\begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ est diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et la diagonaliser.
2. En déduire la déterminant dit circulant $\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_1 \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_0 \end{vmatrix}$.

33 **Matrices de rang 1**

1. Montrer que $A \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ est de rang 1 si et seulement si elle peut s'écrire sous la forme $XY^\intercal$ où X, Y sont des colonnes non nulles de taille à déterminer. Comment s'exprime sa trace en fonction de X et Y ?
2. On suppose que $p=q$. Donner, suivant les valeurs de sa trace, les valeurs propres de A. Donner une CNS pour que A soit diagonalisable.

34 **Théorème de Gerschgorin** En utilisant le résultat d'inversibilité des matrices à diagonale strictement dominante ($\forall\, i,\ |a_{i,i}| > \sum_{j\neq i} |a_{i,j}|$) ou le principe de sa démonstration, montrer que si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, chaque valeur propre complexe de A se trouve dans un disque de Gerschgorin de centre $a_{i,i}$ et de rayon $\sum_{j\neq i} |a_{i,j}|$.

Donner pour chaque valeur propre un disque de centre 0 dans lequel elle se trouve.

3. Trigonalisation

35 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

1. Déterminer, sans calculer son polynôme caractéristique, les valeurs propres de la matrice A.
2. Démontrer, sans déterminer ses sous-espaces propres, que A n'est pas diagonalisable.
3. Justifier que A est trigonalisable, puis trigonaliser A.
4. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

36 **CCINP** Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Calculer le polynôme caractéristique de A puis déterminer une matrice de passage rendant la matrice A semblable à $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Solution de 36 : CCINP

$\chi_A = (X-1)^3$.

$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ convient.

37 **CCINP : convolution** Pour $A = (a_{i,j}), B = (b_{i,j}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, on définit

$$A \star B = \begin{pmatrix} a_{1,1}B & \cdots\cdots & a_{1,n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1}B & \cdots\cdots & a_{n,n}B \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n^2}(B).$$

1. Montrer que si $A, A', B, B' \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, alors $(A\star B)(A'\star B') = (AA')\star(BB')$.
2. En déduire que $A\star B$ est inversible si A et B le sont.
3. Déterminer le spectre de $A\star B$.
4. En déduire la réciproque de 2, le polynôme caractéristique, la trace et le déterminant de $A\star B$.

Solution de 37 : CCINP : convolution

1. Produit par blocs.
2. S'intéresser à $A^{-1}\star B^{-1}$.
3. Trigonaliser.
4. Si les λ_i et μ_j sont les valeurs propres de A et B comptées avec multiplicité,

$$\chi_{A\star B} = \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{n}\left(X - \lambda_i\mu_j\right).$$

$$\det(A\star B) = (\det(A)\det(B))^n.$$

$$\mathrm{tr}(A\star B) = \mathrm{tr}(A)\,\mathrm{tr}(B).$$

38 Très classique : trigonalisation simultanée

On suppose que le corps de base est $\mathbb{C}$ et u et v sont deux endomorphismes qui commutent. Démontrer qu'ils ont au moins un vecteur propre commun.

Utiliser ce résultat pour démontrer que u et v sont simultanément trigonalisables.

Solution de 38 : Très classique : trigonalisation simultanée

Le corps de base étant algébriquement clos, $\mathrm{Sp}(u) \neq \emptyset$. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$. v laisse stable $\mathrm{Ker}(u-\lambda Id)$, car v et $u-\lambda Id$ commutent. Et donc v induit sur $\mathrm{Ker}(u-\lambda Id)$ un endomorphisme v_λ. Cet endomorphisme admet un vecteur propre (car le corps de base est algébriquement clos). Or un vecteur propre de v_λ est un vecteur propre de v qui est dans $\mathrm{Ker}(u-\lambda Id)$, et donc est aussi vecteur propre pour u.

Montrons par récurrence la propriété $\mathscr{P}_n$: « si A et B sont deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ qui commutent, alors il existe P inversibles et T, T' triangulaires supérieures telles que $A = PTP^{-1}$ et $B = PT'P^{-1}$ ».

Pour $n = 1$, c'est bien clair.

Montrons que $\mathscr{P}_n \Rightarrow \mathscr{P}_{n+1}$; soit A et B deux matrices de $\mathscr{M}_{n+1}(\mathbf{C})$ qui commutent. Les endomorphismes u et v de $\mathbf{C}^{n+1}$ canoniquement associés à A et B commutent, donc d'après ce qui précède ont un vecteur propre commun. Dans une base commençant par ce vecteur propre, leurs matrices respectives sont de la forme

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda & * \cdots\cdots * \\ 0 & \\ \vdots & A'' \\ 0 & \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B' = \begin{pmatrix} \mu & * \cdots\cdots * \\ 0 & \\ \vdots & B'' \\ 0 & \end{pmatrix}$$

A' et B' commutent, donc, par produit par blocs, A'' et B'' commutent. On peut leur appliquer $\mathscr{P}_n$, il existe donc $P \in \mathscr{GL}_n(\mathbf{C})$ et T'', U'' triangulaires supérieures telles que

$$P^{-1}A''P = T'' \quad , \quad P^{-1}B''P = U''$$

Soit alors $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \cdots\cdots 0 \\ 0 & \\ \vdots & P \\ 0 & \end{pmatrix} \in \mathscr{GL}_{n+1}(\mathbf{C})$; un produit par blocs montre que $Q^{-1}A'Q$ et $Q^{-1}B'Q$ sont triangulaires supérieures.

4. Réduction par blocs

39

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $M = \begin{pmatrix} 3B & B \\ -2B & 0 \end{pmatrix}$.

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$. Justifier que A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ et la diagonaliser.
2. En déduire que M est semblable à la matrice $M' = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 2B \end{pmatrix}$.
3. Démontrer que si B est diagonalisable, alors M est diagonalisable.

40

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $M = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ A & 0 \end{pmatrix}$.

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur A pour que M soit diagonalisable.

Solution de 40 :

On résout $MX = \lambda X$ par blocs :

$$\begin{pmatrix} 0 & I_n \\ A & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} X_2 &= \lambda X_1 \\ AX_1 &= \lambda X_2 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} X_2 &= \lambda X_1 \\ AX_1 &= \lambda^2 X_1 \end{cases}$$

On voit que λ est valeur propre de M si et seulement si λ^2 est valeur propre de A, et les dimensions des sous-espaces propres sont les mêmes (l'application

$$X_1 \mapsto \begin{pmatrix} X_1 \\ \lambda X_1 \end{pmatrix}$$

est un isomorphisme de $E_{\lambda^2}(A)$ dans $E_\lambda(M)$). En utilisant la caractérisation de la diagonalisabilité par la somme des dimensions des sous-espaces propres, on en déduit

M est diagonalisable si et seulement si A l'est et toutes les valeurs propres de A ont deux racines carrées distinctes.

Pour $\mathbf{K}=\mathbf{C}$, M est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable et inversible. Pour $\mathbf{K}=\mathbf{R}$ par exemple, M est diagonalisable si et seulement si A l'est et $\mathrm{Sp}(A)\subset\mathbf{R}_*^+$.

41 Soit A, B matrices carrées d'ordre p et q respectivement. On définit par blocs la matrice $M=\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & B\end{pmatrix}$.

1. Montrer que M est diagonalisable (respectivement trigonalisable) si A et B le sont.
2. Soit C à p lignes et q colonnes, $N=\begin{pmatrix}A & C\\ 0 & B\end{pmatrix}$.
   On suppose que A et B sont diagonalisables et n'ont aucune valeur propre commune.
   Montrer que N est diagonalisable et semblable à M. Préciser les sous-espaces propres de N.

Solution de 41 :

1. Si A et B sont diago(resp. trigo)nalisable, on a P,Q inversibles et D,D' diagonales (resp. T,T' triangulaires) telles que $A=PDP^{-1}$ et $B=QD'Q^{-1}$ (resp. $A=PTP^{-1}$ et $B=QT'Q^{-1}$).
   Alors $M=\begin{pmatrix}P & 0\\ 0 & Q\end{pmatrix}\begin{pmatrix}D & 0\\ 0 & D'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}P^{-1} & 0\\ 0 & Q^{-1}\end{pmatrix}$ (resp. $M=\begin{pmatrix}P & 0\\ 0 & Q\end{pmatrix}\begin{pmatrix}T & 0\\ 0 & T'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}P^{-1} & 0\\ 0 & Q^{-1}\end{pmatrix}$), les matrices extrêmes étant inverses l'une de l'autre, la matrice interne étant diagonale (resp. triangulaire).
2. Comme $\chi_N=\chi_A\chi_B$, $\mathrm{Sp}\,N=\mathrm{Sp}\,A\sqcup\mathrm{Sp}\,B$.
   Soit $\lambda\in\mathrm{Sp}\,A$ (donc $\lambda\notin\mathrm{Sp}\,B$), $N\begin{pmatrix}X_1\\ X_2\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}X_1\\ X_2\end{pmatrix}$ si et seulement si $\begin{cases}AX_1+CX_2=\lambda X_1\\ BX_2=\lambda X_2\end{cases}$ si et seulement si ($\lambda\notin\mathrm{Sp}\,B$) $\begin{cases}AX_1=\lambda X_1\\ X_2=0_{q,1}\end{cases}$
   Donc $E_\lambda(N)=\left\{\begin{pmatrix}X_1\\ 0\end{pmatrix},\ X_1\in E_\lambda(A)\right\}$ qui a comme dimension $\dim E_\lambda(A)$ (soit via un isomorphisme, soit en exhibant une base, ce n'est pas difficile.)
   Puis si $\mu\in\mathrm{Sp}\,B$ (donc $\mu\notin\mathrm{Sp}\,A$), $N\begin{pmatrix}X_1\\ X_2\end{pmatrix}=\mu\begin{pmatrix}X_1\\ X_2\end{pmatrix}$ si et seulement si $\begin{cases}AX_1+CX_2=\mu X_1\\ BX_2=\mu X_2\end{cases}$ si et seulement si $\begin{cases}X^2\in E_\mu(B)\\ X_1=M_\mu X_2\end{cases}$
   où $M_\mu=(\mu I_p-A)^{-1}C$ est bien défini ($\mu\notin\mathrm{Sp}\,A$).
   Donc $E_\mu(N)=\left\{\begin{pmatrix}M_\mu X_2\\ X_2\end{pmatrix},\ X_2\in E_\mu(B)\right\}$ de dimension $\dim E_\mu(B)$ car
   $$X_2\in E_\mu(B)\mapsto\begin{pmatrix}M_\mu X_2\\ X_2\end{pmatrix}\in E_\mu(N)$$
   est un isomorphisme.
   On a alors $p+q=\sum\limits_{\lambda\in\mathrm{Sp}\,A}\dim E_\lambda(A)+\sum\limits_{\mu\in\mathrm{Sp}\,B}\dim E_\mu(B)=\sum\limits_{\rho\in\mathrm{Sp}\,N}\dim E_\rho(N)$ et N est diagonalisable.
   Enfin, comme $\chi_N=\chi_A\chi_B=\chi_M$, N a les mêmes valeurs propres que M avec même multiplicité, les deux étant diagonalisables : elles sont semblables.

5. Matrices et endomorphismes nilpotents

42 Quelles sont les matrices nilpotentes diagonalisables ?

43 Soit $n\in\mathbb{N}$ et $u:\left|\begin{array}{ccc}\mathbb{K}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}_n[X]\\ P & \longmapsto & P'\end{array}\right.$.

1. Montrer que u est un endomorphisme nilpotent et donner son indice de nilpotence.
2. Écrire la matrice A de u dans la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$.

44 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et u l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.

Montrer que u est nilpotent et déterminer son indice de nilpotence.

45 Montrer que sur $\mathbb{C}$, une matrice est nilpotente si et seulement si 0 est sa seule valeur propre.

Est-ce encore vrai sur $\mathbb{R}$?

46 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension fin $n \geqslant 2$ et $u \in \mathscr{L}(E)$ nilpotent d'indice p.

1. Justifier l'existence d'un vecteur $a \in E$ tel que $u^{p-1}(a) \neq 0$.
2. Démontrer que $\mathscr{F} = \left(a, u(a), \ldots, u^{p-1}(a)\right)$ est une famille libre de E.
3. Retrouver le fait que $p \leqslant n$
4. Dans cette question, on suppose que $p = n$.
   Écrire la matrice de u dans la base $\mathscr{B}' = \left(u^{n-1}(a), \ldots, u(a), a\right)$.