Réduction : point de vue géométrique

- Méthodes générales :
  - Regarder ce qui se passe en petite dimension (2 ou 3) permet parfois d'éclairer les choses.
  - Pour les endomorphismes, une base bien adaptée au problème permet de le transformer en un problème simple. C'est le cas aussi si l'espace se décompose en somme directe de sous-espaces simples.
  - En travaillant avec des matrices dans $\mathbb{R}$, passer dans $\mathbb{C}$ permet d'avoir des propriétés intéressantes (pour trigonaliser par exemple).
- Détermination des éléments propres :
  - Le polynôme caractéristique sert à déterminer les valeurs propres : il faut donc en donner une forme la plus factorisée possible. Si l'on calcule celui-ci par une méthode du pivot de Gauss en travaillant sur le
  - Lorsqu'une matrice se présente par blocs, on aura souvent intérêt à chercher les vecteurs propres par blocs : pour résoudre $AX=\lambda X$ où $A=\begin{pmatrix} M & N \\ P & Q \end{pmatrix}$, on écrira $X=\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$.
- Diagonalisabilité :
  - Avoir n valeurs propres distinctes en dimension n suffit.
  - On peut ajouter les dimensions des sous-espaces propres (multiplicités géométriques) et comparer à la dimension de l'espace.
  - Lorsque le polynôme caractéristique est scindé, il y a diagonalisabilité si et seulement si les dimensions de chaque sous-espace propre sont égales aux multiplicités des valeurs propres.
  - On verra plus tard qu'une matrice symétrique **réelle** est automatiquement diagonalisable.
  - Savoir diagonaliser complètement en petite dimension, et savoir en déduire puissance de matrice, terme général de suites récurrentes, commutant.
- Trigonalisation :
  - Sur $\mathbb{C}$, c'est automatique. On effectue assez rarement des calculs explicites de trigonalisation.
  - Mais le fait que toute matrice complexe soit trigonalisable est d'usage courant.
- Comme les sous-espaces propres sont toujours en somme directe, une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est automatiquement libre. Pratique !

Sauf mention contraire, $\mathbb{K}$ désigne un sous-corps de $\mathbb{C}$, et n un entier naturel non nul.

1. Exercices cherchés en cours

1 Montrer que tout projection peut être représentée par un matrice de la forme $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et que toute symétrie peut être représentée par un matrice de la forme $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & -I_{n-r} \end{pmatrix}$.

2 Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Déterminer le rang de $M=\begin{pmatrix} A & A \\ A & B \end{pmatrix}$.
2. Calculer l'inverse de M lorsque c'est possible.

3 Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice $A=\begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

1. Soit $H=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x-y+2z=0\}$. Montrer que H est stable par u.
2. Soit $x=(3,2,1)$ et $D=\mathrm{Vect}(x)$. Montrer que D est stable par u.
3. Justifier que $\mathbb{R}^3=D\oplus H$.
4. Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans la quelle la matrice de u est diagonale par blocs, à cœfficients entiers.

4 Montrer $\left(x\mapsto e^{\lambda x}\right)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ et $(x\mapsto\cos(\lambda x))_{\lambda\in\mathbb{R}^+}$ sont des familles libres.

5 **CCINP 83 : Valeur propre de composée**

6 Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que A et $A^\intercal$ ont même polynôme caractéristique.

7 Montrer qu'en dimension impaire, un matrice réelle a toujours au moins une valeur propre réelle.

8 **CCINP 72 : Endomorphismes de rang 0 ou 1**

9 Que peut-on dire d'une matrice diagonalisable ayant une unique valeur propre ?

10 Diagonaliser $A=\begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

11 **CCINP 67 : Diagonalisation dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$**

12 **CCINP 59 : Endomorphisme de polynômes**

13 **CCINP 69 : Rang et diagonalisabilité**

14 **CCINP 70 : Réduction de matrice circulante**

15 **Matrices compagnes** Calculer le polynôme caractéristique de la matrice compagne $(a_0,\dots,a_{n-1}\in\mathbb{K})$

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & 1\\ a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1}\end{pmatrix}.$$

Vérifier que ses sous-espaces propres sont des droites puis montrer qu'elle est diagonalisable si et seulement si le polynôme caractéristique est scindé simple.

16 Trouver le terme général des suites x,y,z telles que pour tout n, $\begin{cases} x_{n+1}=y_n+z_n\\ y_{n+1}=x_n+z_n\\ z_{n+1}=x_n+y_n\end{cases}$

17 Trouver le commutant de $A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$.

18 **CCINP 73 : Commutant d'une matrice 2×2**

19 Trouver les racines carrées de $A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$.

20 Déterminer le terme général des suites complexes vérifiant $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+3}=-u_{n+2}-u_{n+1}-u_n$ en posant $X_n=\begin{pmatrix}u_n\\u_{n+1}\\u_{n+2}\end{pmatrix}$.

21 $A=\begin{pmatrix}-7&1\\-9&-1\end{pmatrix}$

1. A est-elle trigonalisable ? Diagonalisable ?
2. Trigonaliser (resp. diagonaliser) A si elle est trigonalisable (resp. diagonalisable).

2. Éléments propres et diagonalisation

22

1. Pour quelles valeurs de $a\in\mathbb{R}$ la matrice $A=\begin{pmatrix}6&2&0\\2&3&0\\a^2-7a&a-7&a\end{pmatrix}$ admet-elle une valeur propre double ? Pour ces valeurs, A est-elle diagonalisable ?
2. Soit $M=\begin{pmatrix}6&2&0\\2&3&0\\-10&-5&2\end{pmatrix}$. Calculer M^n pour $n\in\mathbb{N}$.

23 Soit $A=\begin{pmatrix}4&-2&-2\\1&0&-1\\3&-2&-1\end{pmatrix}$.

1. Diagonaliser A.
2. En déduire A^n pour tout $n\in\mathbb{N}$.
3. Déterminer le terme général des suites x,y,z définies par $x_0=1,\ y_0=0,\ z_0=0$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$ $\begin{cases} x_{n+1} &=& 4x_n-2(y_n+z_n)\\ y_{n+1} &=& x_n-z_n\\ z_{n+1} &=& 3x_n-2y_n-z_n\end{cases}$

24 Quelles sont les matrices élémentaires $E_{i,j}\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalisables ?

25 Soit $A=\begin{pmatrix}3&1&-3\\-1&1&1\\1&1&-1\end{pmatrix}$.

1. Déterminer $\operatorname{Ker}A$ et $\operatorname{Im}A$.
2. Diagonaliser A.
3. En déduire A^n pour tout $n\in\mathbb{N}$.

26 Soit $u\in\mathscr{L}(E)$ tel que tout vecteur non nul x soit un vecteur propre. Que dire de u ?

27 Déterminer le commutant et les racines carrées de la matrice $A=\begin{pmatrix}8&-10&10\\2&-1&2\\-3&6&-5\end{pmatrix}$.

28 Montrer que $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable si et seulement si $A^\intercal$ l'est.

29 Déterminer les valeurs propres de la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ $M=\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\1&\ddots&&(0)\\\vdots&&\ddots&\\1&(0)&&1\end{pmatrix}$

30 On souhaite démontrer que si $A,B\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\chi_{AB}=\chi_{BA}$.

1. Montrer le résultat si on suppose de plus que $A\in\mathscr{GL}(\mathbb{K})$.
2. En déduire le résultat si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ en utilisant l'exercice suivant.
3. Retrouver le résultat dans le cas général en calculant le produit dans les deux sens de $\begin{pmatrix}A&XI_n\\I_n&(0)\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}-B&XI_n\\I_n&-A\end{pmatrix}$.

31 **Densité de $\mathscr{GL}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$** Montrer que si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $n\in\mathbb{N}^*$ et $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, alors pour $\lambda\in\mathbb{K}$ suffisamment proche de 0, $A-\lambda I_n\in\mathscr{GL}_n(\mathbb{K})$. En déduire que toute matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est limite d'une suite de matrices de $\mathscr{GL}_n(\mathbb{K})$ au sens où $A^{(k)}\xrightarrow[k\to+\infty]{}A$ lorsque pour tout (i,j), $a_{i,j}^{(k)}\to a_{i,j}$.

Retrouver le résultat en exploitant le fait que tout matrice de rang r est équivalente à J_r.

32 Matrices circulantes

Soit $n \geqslant 2$.

1. Montrer que la matrice $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et la diagonaliser.
2. En déduire la déterminant dit circulant $\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_1 \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_0 \end{vmatrix}$.

33 Matrices de rang 1

1. Montrer que $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ est de rang 1 si et seulement si elle peut s'écrire sous la forme $XY^\top$ où X, Y sont des colonnes non nulles de taille à déterminer. Comment s'exprime sa trace en fonction de X et Y ?
2. On suppose que $p = q$. Donner, suivant les valeurs de sa trace, les valeurs propres de A. Donner une CNS pour que A soit diagonalisable.

34 Théorème de Gerschgorin

En utilisant le résultat d'inversibilité des matrices à diagonale strictement dominante ($\forall\, i,\ \ |a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$) ou le principe de sa démonstration, montrer que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, chaque valeur propre complexe de A se trouve dans un disque de Gerschgorin de centre $a_{i,i}$ et de rayon $\sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$.

Donner pour chaque valeur propre un disque de centre 0 dans lequel elle se trouve.

3. Trigonalisation

35

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

1. Déterminer, sans calculer son polynôme caractéristique, les valeurs propres de la matrice A.
2. Démontrer, sans déterminer ses sous-espaces propres, que A n'est pas diagonalisable.
3. Justifier que A est trigonalisable, puis trigonaliser A.
4. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

36 CCINP

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Calculer le polynôme caractéristique de A puis déterminer une matrice de passage rendant la matrice A semblable à $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

37 CCINP : convolution

Pour $A = (a_{i,j}), B = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on définit

$$A \star B = \begin{pmatrix} a_{1,1}B & \cdots & a_{1,n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1}B & \cdots & a_{n,n}B \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n^2}(B).$$

1. Montrer que si $A, A', B, B' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, alors $(A \star B)(A' \star B') = (AA') \star (BB')$.
2. En déduire que $A \star B$ est inversible si A et B le sont.
3. Déterminer le spectre de $A \star B$.
4. En déduire la réciproque de 2, le polynôme caractéristique, la trace et le déterminant de $A \star B$.

38 Très classique : trigonalisation simultanée

On suppose que le corps de base est $\mathbb{C}$ et u et v sont deux endomorphismes qui commutent. Démontrer qu'ils ont au moins un vecteur propre commun.

Utiliser ce résultat pour démontrer que u et v sont simultanément trigonalisables.

Plus généralement, justifier que si deux endomorphismes trigonalisables sur un corps quelconque commutent, alors ils sont simultanément trigonalisables.

4. Réduction par blocs

39

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $M = \begin{pmatrix} 3B & B \\ -2B & 0 \end{pmatrix}$.

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$. Justifier que A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ et la diagonaliser.
2. En déduire que M est semblable à la matrice $M' = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 2B \end{pmatrix}$.
3. Démontrer que si B est diagonalisable, alors M est diagonalisable.

40

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $M = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ A & 0 \end{pmatrix}$.

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur A pour que M soit diagonalisable.

41

Soit A, B matrices carrées d'ordre p et q respectivement. On définit par blocs la matrice $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$.

1. Montrer que M est diagonalisable (respectivement trigonalisable) si A et B le sont.
2. Soit C à p lignes et q colonnes, $N = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$.

   On suppose que A et B sont diagonalisables et n'ont aucune valeur propre commune.
   Montrer que N est diagonalisable et semblable à M. Préciser les sous-espaces propres de N.

5. Matrices et endomorphismes nilpotents

42 Quelles sont les matrices nilpotentes diagonalisables ?

43 Soit $n \in \mathbb{N}$ et $u : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}_n[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{array} \right.$.

1. Montrer que u est un endomorphisme nilpotent et donner son indice de nilpotence.
2. Écrire la matrice A de u dans la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$.

44 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et u l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.

Montrer que u est nilpotent et déterminer son indice de nilpotence.

45 Montrer que sur $\mathbb{C}$, une matrice est nilpotente si et seulement si 0 est sa seule valeur propre. Est-ce encore vrai sur $\mathbb{R}$?

46 **Sous-espaces stables et commutant d'un endomorphisme nilpotent** Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension fin $n \geqslant 2$ et $u \in \mathscr{L}(E)$ nilpotent d'indice p.

1. Justifier l'existence d'un vecteur $a \in E$ tel que $u^{p-1}(a) \neq 0$.
2. Démontrer que $\mathscr{F} = \left(a, u(a), \ldots, u^{p-1}(a)\right)$ est une famille libre de E.
3. Retrouver le fait que $p \leqslant n$
4. Dans cette question, on suppose que $p = n$.

   (a) Démontrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est $\begin{pmatrix} 0 & I_{n-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   (b) Montrer que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\dim \operatorname{Ker} u^k = k$.

   (c) Soit F sous-espace de E stable par u de dimension $k \geqslant 1$. En considérant l'endomorphisme u_F induit par u sur F, montrer que $F = \operatorname{Ker} u^k$.

   (d) Soit $v \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que $u \circ v = v \circ u$ si et seulement si $v \in \operatorname{Vect}\left(\mathrm{id}_E, u, \ldots, u^{n-1}\right) = \mathbb{K}[u]$.

47 Soit $N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente.

1. Calculer $\det(I_n + N)$.
2. Soit $A \in \mathscr{GL}_n(\mathbb{C})$. Calculer $\det(A + N)$.
3. Le résultat de la question précédente s'étend-il aux matrices $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$?