

1.2 – Épreuves écrites

1.2 A - MATHÉMATIQUES I - filière MP

I) LE SUJET

L'objet de ce problème est d'étudier les propriétés de certains caractères de Dirichlet et de certaines séries entières associées.

La partie I propose l'étude de quelques cas particuliers simples.

La partie II conduit à démontrer la convergence d'une certaine série.

La partie III a pour but la définition et l'étude asymptotique d'une certaine série entière.

Le sujet met en jeu une partie du programme d'arithmétique élémentaire et d'analyse. Plus précisément, les notions suivantes jouent un rôle important dans le problème : congruences modulo un entier, division euclidienne, convergence d'une série numérique, critère de Cauchy, série entière, comparaison série et intégrale.

II) LES RESULTATS OBTENUS

La taille du problème est bien adaptée à la durée de l'épreuve. La très grande majorité des candidats ont bien assimilé l'énoncé et ont compris de quoi il retourne. Certains d'entre-eux traitent avec succès la quasi-totalité du problème et impressionnent le jury. La rédaction des candidats est en général plus précise et mieux structurée que lors des années précédentes. Cela vient sans doute du fait que l'énoncé, de par sa taille, était bien adapté à la durée de l'épreuve. Cette épreuve a permis de bien classer les candidats par ordre de mérite.

La moyenne générale est de l'ordre de : 8,67.

L'écart type est de l'ordre de : 4,21.

III) COMMENTAIRE DETAILLE

Nous allons indiquer quelques erreurs ou maladresses fréquemment commises.

Certaines des questions demandent d'établir des énoncés faciles et techniques dans lesquels la réponse est donnée.

Le correcteur se doit de faire la différence entre une tentative de bluff et une rédaction vague émanant d'un candidat qui a compris à peu près ce qu'il faut faire. Cette différence est souvent délicate. Une tentative de tricherie s'avère très pénalisante pour son auteur car par la suite l'examineur interprète toute rédaction vague comme une tentative de bluff.

Question 1. Des erreurs de logique ont été commises dans l'usage de l'hypothèse B.

Question 2. Certains candidats ignorent que 0 est un nombre pair.

Question 4. Le critère spécial sur les séries alternées est parfois mal connu.

Question 5. On demande d'établir le résultat en considérant un certain produit. Bien entendu, c'est cette méthode que les candidats devaient suivre. La structure des ensembles $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ est parfois mal comprise.

Dans les questions 7 et 8, l'argument comme quoi, un sous-ensemble de $N-1$ éléments deux à deux distincts de $\{1, \dots, N-1\}$ coïncide avec $\{1, \dots, N-1\}$ est souvent mal exposé.

Question 11. La définition d'une suite de Cauchy est souvent mal comprise. La transformation d'Abel (rappelée dans l'énoncé car hors programme) ne permet pas de prouver qu'une série est absolument convergente... Une série numérique dont la suite des sommes partielles est majorée n'est pas nécessairement convergente.

La rédaction de la question 12, reposant sur un argument de divisibilité élémentaire, a souvent été bâclée.

Question 13. Certains candidats n'ont pas su donner la liste des diviseurs d'une puissance positive de p où p est un nombre premier.

La question 16 se traite en deux temps, et il faut soigneusement considérer les modules des coefficients (ou rappeler qu'ils sont bien positifs ou nuls). Beaucoup d'erreurs ont été commises lors de la manipulation d'inégalités élémentaires.

IV) RECOMMANDATIONS AUX FUTURS CANDIDATS

Il est préférable de commencer par lire tranquillement la totalité du sujet pour assimiler les notations et comprendre de quoi il retourne.

Il est très important d'écrire lisiblement et d'encadrer les résultats obtenus.

A propos d'une question dont la réponse est donnée dans l'énoncé, le jury attend une démonstration très claire, concise et citant avec précision les théorèmes du cours et les résultats antérieurs utilisés (avec les numéros des questions correspondantes).

Il faut éviter de court-circuiter la moindre étape. En aucun cas, le correcteur ne peut attribuer de points s'il n'a pas la certitude absolue que la réponse donnée est parfaitement correcte d'autant plus qu'il n'est absolument pas question de pénaliser ceux des candidats qui ont pris le temps de bien rédiger.

Nous recommandons donc vivement aux candidats, d'une part de chercher et construire chaque démonstration au brouillon, et d'autre part de ne recopier une démonstration au propre que lorsqu'ils sont certains qu'elle est devenue claire et concise.

De plus, nous conseillons fortement aux candidats qui ne savent pas traiter une question d'indiquer nettement qu'ils en admettent le résultat pour la suite.

Tout acte d'honnêteté est très apprécié ; en revanche toute tentative de dissimulation ou de tricherie indispose les correcteurs et peut être très pénalisante.