DEVOIR EN TEMPS LIMITÉ N°4

Vous avez le choix entre deux sujets :

- CCINP : un (petit) problème d'algèbre et un (plus gros) problème d'analyse. Sujet plutôt classique et bien guidé dont les parties sont largement indépendantes.
- Mines-Ponts Maths 2 MP 2007 : sujet plus abstrait, pas infaisable, mais nettement plus difficile. Certaines notations peuvent surprendre !

Les consignes de présentation sont toujours les mêmes.

Placez-vous dans des conditions de concours : vous y êtes, vous donnez tout.

Je vous fais confiance, vous êtes capable du meilleur !

💪

Sujet CCINP :

Les calculatrices sont interdites

Problème 1 : Mathématiques 2 – MP – 2019
MATRICES SEMBLABLES

On s'intéresse dans ce problème, à tracers divers exemples, à quelques méthodes pour prouver que deux matrices sont semblables.

Partie I – Étude de quelques exemples

Q.1. Justifier que deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui sont semblables ont la même trace, le même rang, le même déterminant et le même polynôme caractéristique.

Q.2. On donne deux matrices

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}\quad \text{et}\quad B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix}.$$

Vérifier que ces deux matrices ont la même trace, le même rang, le même déterminant et le même polynôme caractéristique.
Ces deux matrices sont-elles semblables ? (on pourra vérifier que l'une de ces matrices est doagonalisable).

Q.3. On donne deux matrices

$$A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&0\\2&1&0\end{pmatrix}\quad \text{et}\quad B=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\1&2&0\end{pmatrix}.$$

Établir que ces deux matrices sont semblables par les deux méthodes suivantes :

- *Première méthode* : en utilisant u l'endomorphisme associé à A dans une base (e_1,e_2,e_3) d'un espace vectoriel E et en cherchant, sans calculs, une nouvelle base de E.
- *Deuxième méthode* : en prouvant que le polynôme X^3-3X-1 admet trois racines réelles distinctes (que l'on ne cherchera pas à déterminer) notées α,β et γ.

Q.4. Démontrer que toute matrice $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang 1 est semblable à une matrice :

$$U=\begin{pmatrix}0&\cdots&0&a_1\\ \vdots&&\vdots&a_2\\ \vdots&&\vdots&\vdots\\ 0&\cdots&0&a_n\end{pmatrix}.$$

Q.5. *Application* : soit E un espace vectoriel de dimension $n\geq 2$ et u un endomorphisme de Ede rang 1 vérifiant $u\circ u\neq 0$, démontrer que u est diagonalisable.

Q.6. On donne une matrice $A=\begin{pmatrix}\alpha&\beta&\alpha&\beta\\ \beta&\alpha&\beta&\alpha\\ \alpha&\beta&\alpha&\beta\\ \beta&\alpha&\beta&\alpha\end{pmatrix}$ où α,β sont deux nombres complexes non nuls, différents et non opposés.

Déterminer le rang de la matrice A et en déduire que 0 est valeur propre de A.

Justifier que $2(\alpha+\beta)$ et $2(\alpha-\beta)$ sont aussi valeurs propres de A.

Préciser une base de vecteurs propres de A.

Dans cette question, il est déconseillé de calculer le polynôme caractéristique de A.

Partie II – Démonstration d'un résultat

On se propose de démontrer que deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, il existe une matrice P inversible à coefficients complexes telle que $B=P^{-1}AP$. Écrivons $P=R+\mathrm{i}S$ où R et S sont deux matrices à coefficients réels.

Q.7. Montrer que $RB=AR$ et $SB=AS$.

Q.8. Justifier que la fonction $x\mapsto \det(R+xS)$ est une fonction polynômiale non identiquement nulle et en déduire qu'il existe un réel x tel que la matrice $Q=R+xS$ soit inversible.

Q.9. Conclure que les matrices A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Q.10. *Application* : démontrer que toute matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de polynôme caractéristique X^3+X est semblable à la matrice $B=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}$.

Problème 2 : Mathématiques 1 – MP – 2018
ESTIMATIONS NUMERIQUES D'INTEGRALES

Objectifs

Le fil conducteur de ce sujet est le calcul approché d'intégrales.

La partie 1 est indépendante des autres parties. A travers l'exemple de l'intégrale de Gauss, on utilise des suites de fonctions et on « permute limite et intégrale ».
Les parties 2 et 3 peuvent être traitées de manière indépendante. La partie 4 utilise des résultats des parties 2 et 3.
Les parties 2, 3 et 4 traitent de l'utilisation de polynômes interpolateurs pour le calcul approché d'intégrales : on présente le principe des méthodes de quadrature, dite de Newton-Cotes, ainsi qu'un raffinement avec la méthode de quadrature de Gauss.

Notations

★ Si f est une fonction réelle bornée sur $[a,b]$ avec $a<b$, on pose

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$$

★ On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n. On pourra confondre les expressions « polynômes » et « fonctions polynomiales ».

1. « Permutation limite-intégrale » et intégrales de Gauss

On considère l'intégrale de Gauss

$$I=\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}\,dx$$

Q.1. (a) On pose, pour $t\in[-1,1]$ et $n\in\mathbb{N}$, $e_n(t)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{t^k}{k!}$.

Justifier, en utilisant une formule de Taylor, que la suite de fonction $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction à préciser sur $[-1,1]$.

(b) Montrer que la convergence est en fait uniforme.

(c) Justifier que la suite de fonctions $(\varphi_n : x\mapsto e_n(-x^2))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $\varphi : x\mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$ sur $[0,1]$.

(d) En déduire que $I=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)n!}$.

On pose, pour $n\in\mathbb{N}$,

$$s_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k+1)k!}$$

Q.2. Justifier que pour tout $n\in\mathbb{N}$, on

$$|I-s_n|\leqslant\frac{1}{(2n+3)(n+1)!}$$

2. Notion de polynôme interpolateur

Soit $f : [a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction continue. On se donne $n+1$ points $x_0,x_1,\dots,x_n$ dans $[a,b]$, deux à deux distincts.
On appelle polynome interpolateur de f aux points x_i, un polynôme $P\in\mathbb{R}_n[X]$ qui coïncide avec f aux points x_i, c'est-à-dire tel que pour tout $i\in[\![0,n]\!]$, $P(x_i)=f(x_i)$.

A. Existence du polynôme interpolateur

Pour tout entier i de $[\![0,n]\!]$, on définit le polynôme ℓ_i de $\mathbb{R}_n[X]$ par :

$$\ell_i(X)=\prod_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n}\frac{X-x_k}{x_i-x_k}$$

On pose :

$$L_n(f)=\sum_{i=0}^{n}f(x_i)\ell_i(X)$$

Q.3. Démontrer que $L_n(f)$ est un polynôme interpolateur de f aux points x_i, puis démontrer l'unicité d'un tel polynôme.

Un tel polynôme est appelé polynôme interpolateur de Lagrange.

B. Expression de l'erreur d'interpolation

On suppose, en plus dans cette partie, que f est de classe C^{n+1} sur $[a,b]$. On rappelle que $L_n(f)$ est son unique polynôme interpolateur aux points x_i.
On note $\sigma=\{x_0,\dots,x_n\}$ l'ensemble des points d'interpolations et π_σ le polynôme de $\mathbb{R}_{n+1}[X]$ défini par

$$\pi_\sigma=\prod_{i=0}^{n}(X-x_i)$$

On veut démontrer pour tout réel $x\in[a,b]$, la propriété suivante notée $\mathscr{P}_x$:

$$\exists c_x\in]a,b[,\ f(x)-L_n(f)(x)=\frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}\pi_\sigma(x)$$

Q.4. Résultat préliminaire : soit $p\in\mathbb{N}^*$. Démontrer que si $\phi : [a,b]\to\mathbb{R}$ est une fonction p-fois dérivable qui s'annule $p+1$ fois, alors il existe $c\in]a,b[$ tel que $\phi^{(p)}(c)=0$.

Q.5. Justifier que pour tout $x\in\sigma$, la propriété $\mathscr{P}_x$ est vraie.

On fixe x un réel de $[a,b]$ qui n'est pas dans σ. Soit λ un réel. On définit sur $[a,b]$ une application F par

$$F(t)=f(t)-L_n(f)(t)-\lambda\pi_\sigma(t)$$

Q.6. Déterminer un réel λ de sorte que $F(x)=0$. On choisira alors λ de cette façon.

Q.7. Démontrer que F s'annule $n+2$ fois et en déduire que $\mathscr{P}_x$ est vraie.

Q.8. Justifier que la fonction $f^{(n+1)}$ est bornée sur $[a,b]$ et en déduire un réel positif K indépendant de n tel que

$$\|f-L_n(f)\|_\infty\leqslant\frac{K^{n+1}}{(n+1)!}\|f^{(n+1)}\|_\infty$$

Q.9. En déduire que si f est la fonction sinus, la suite $(L_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[0,2\pi]$

Q.10. On définit f sur $[-1,1]$ par $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$. Démontrer à l'aide d'un développement limité que

$$\forall k\in\mathbb{N},\ \|f^{(2k)}\|_\infty \geqslant (2k)!$$

Cette dernière inégalité montre que la quantité $\|f^{(n+1)}\|_\infty$ peut être grande et cela peut empêcher parfois la convergence de la suite de polynômes interpolateurs. Ceci est appelé le phénomène de Runge.

3. Famille de polynômes orthogonaux

On munit $\mathbb{R}[X]$ l'espace des polynômes à coefficients réels du produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ défini par : pour tous polynômes P et Q de $\mathbb{R}[X]$,

$$\langle P,Q\rangle=\int_{-1}^{1}P(t)Q(t)\,dt$$

On applique le procédé d'orthonomalisation de Gram-Schmidt à la base canonique $(1,X,X^2,\dots)$ de $\mathbb{R}[X]$. On obtient donc une famille orthonormée de polynômes $(P_0,P_1,P_2,\dots)$ vérifiant

$$\forall k\in\mathbb{N}^*,\ \mathrm{Vect}(1,X,\dots,X^k)=\mathrm{Vect}(P_0,P_1,\dots,P_k)$$

Le polynôme P_n s'appelle le polynôme de Legendre d'indice n.
On admet que pour tout $k\in\mathbb{N}$, le polynôme P_k est de degré k (conséquence du procédé d'orthonormalisation).

Q.11. Justifier que, pour $n\geqslant 1$, $(P_0,\dots,P_{n-1})$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, puis que le polynôme P_n est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, c'est-à-dire que pour tout $Q\in\mathbb{R}_{n-1}[X]$, $\langle P_n,Q\rangle=0$.

On prend $n\geqslant 1$. On veut démontrer que P_n admet n racines simples dans $[-1,1]$.

Q.12. Justifier que $\displaystyle\int_{-1}^{1}P_n(t)\,dt=0$ et en déduire que P_n admet au moins une racine dans $[-1,1]$.

On suppose par l'absurde que P_n admet strictement moins de n racine simples. Si P_n admet des racines $t_1,\dots,t_p$ de multiplicité impaire avec $p<n$, on pose $Q=(X-t_1)\dots(X-t_p)$; sinon, on pose $Q=1$. On considère enfin le polynôme $H=QP_n$.

Q.13. Justifier que $\displaystyle\int_{-1}^{1}H(t)\,dt=0$, puis conclure (on pourra remarquer que H est de signe constant sur $[-1,1]$).

4. Méthodes de quadrature

Dans cette partie, nous allons voir comment les polynôme interpolateurs de Lagrange peuvent être utilisés pour estimer $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ pour $f\ :\ [a,b]\to\mathbb{R}$ continue.
Pour cela, on choisit d'abord une subdivision $a=x_0<x_1<\dots<x_N=b$ de l'intervalle $[a,b]$. A cause du phénomène de Runge, si N est grand, le polynôme interpolateur de f aux points x_i n'est pas forcément une bonne approximation de f. Approcher $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ par $\displaystyle\int_a^b L_N(f)(x)\,dx$ n'est donc pas forcément pertinent...
Nous allons en fait approcher f par un polynôme d'interpolation sur chaque petit intervalle $[x_k,x_{k+1}]$. D'après la relation de Chasles, on a

$$\int_a^b f(x)\,dx=\sum_{k=0}^{N-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}}f(x)\,dx$$

Q.14. Justifier que $\displaystyle\int_{x_k}^{x_{k+1}}f(x)\,dx=\frac{x_{k+1}-x_k}{2}\int_{-1}^{1}g(t)\,dt$ avec $g(t)=f\left(x_k+(t+1)\dfrac{x_{k+1}-x_k}{2}\right)$.

On est donc ramenés à estimer $\displaystyle\int_{-1}^{1}g(t)\,dt$ où $g\ :\ [-1,1]\to\mathbb{R}$ est une fonction continue.
On se donne $n+1$ points $t_0,t_1,\dots,t_n$ dans $[-1,1]$, deux à deux distincts.
On rappelle que $L_n(g)=\displaystyle\sum_{i=0}^{n}g(t_i)\ell_i(X)$ est le polynôme interpolateur de g aux points t_i et on pose

$$J(g)=\int_{-1}^{1}L_n(g)(t)\,dt=\sum_{i=0}^{n}\alpha_i g(t_i)\quad\text{avec}\quad \alpha_i=\int_{-1}^{1}\ell_i(t)\,dt$$

Lorsqu'on approche $\displaystyle\int_{-1}^{1}g(t)\,dt$ par $J(g)$, c'est-à-dire :

$$\int_{-1}^{1}g(t)\,dt\approx\sum_{i=0}^{n}\alpha_i g(t_i)$$

on dit que J est une méthode de quadrature associée aux points $t_0,\dots,t_n$ et aux poids $\alpha_0,\dots,\alpha_n$.

Q.15. Justifier que pour tout polynôme $P\in\mathbb{R}_n[X]$, on a $J(P)=\displaystyle\int_{-1}^{1}P(t)\,dt$.

On dit que la méthode de quadrature J est d'ordre au moins n car la formule approchée est exacte pour les polynômes de dégré inférieur ou égal à n.

Q.16. Exemple : on prend $n=1$, $t_0=-1$ et $t_1=1$. Déterminer α_0 et α_1. Expliquer à l'aide d'un graphique en prenant g positive pourquoi, dans ce cas, la méthode J s'appelle la « méthode des trapèzes ».

Quadrature de Gauss

Dans les deux questions suivantes, on prend pour points d'interpolation $t_0,t_1,\dots,t_n$ les $(n+1)$ racines du polynôme de Legendre P_{n+1} introduit dans la partie 3.
Nous allons démontrer que, dans ce cas, la formule de quadrature J est d'ordre au moins $2n+1$.
Soit $P\in\mathbb{R}_{2n+1}[X]$. On fait la division euclidienne de P par P_{n+1}, on note respectivement Q le quotient et R le reste de cette division :

$$P=QP_{n+1}+R$$

Q.17. Démontrer que $J(QP_{n+1})=\displaystyle\int_{-1}^{1}Q(t)P_{n+1}(t)\,dt$, puis conclure que $J(P)=\displaystyle\int_{-1}^{1}P(t)\,dt$.

Q.18. Démontrer que les poids $\alpha_0,\dots,\alpha_n$ associés à la quadrature de Gauss sont strictement positifs et calculer leur somme.

A 2007 MATH. II MP

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES.
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE.
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (Filière TSI).

CONCOURS D'ADMISSION 2007

SECONDE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Filière MP

(**Durée de l'épreuve : 4 heures**)
L'usage d'ordinateur ou de calculette est interdit.

Sujet mis à la disposition des concours :
ENSAE (Statistique), ENSTIM, INT, TPE-EIVP, Cycle international

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES II - MP.

L'énoncé de cette épreuve comporte 6 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Algèbres de Lie

Dans tout ce problème, n est un entier au moins égal à 1. On note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des matrices à n lignes et p colonnes, à coefficients complexes.

On identifiera une matrice colonne X (un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$) et le vecteur de $\mathbb{C}^n$ dont les composantes dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$ sont les coefficients de la matrice X. Pour $M \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$, on note $\overline{M}$ l'endomorphisme canoniquement associé de $\mathbb{C}^n$: $\overline{M}$ est l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ dont M est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$. Par ailleurs, $E_\lambda(\overline{M})$ est l'espace propre associé à la valeur propre λ de l'endomorphisme $\overline{M}$.

Pour une matrice $M \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ de coefficients $(m_{ij}, i, j = 1, \cdots, n)$ et pour $k = 0, \cdots, n-1$, on appelle k-ième diagonale supérieure de M, notée $D_k(M)$, l'ensemble des coefficients $(m_{i,\,i+k}, i = 1, \cdots, n-k)$. Une diagonale supérieure $D_k(M)$ est dite nulle lorsque tous ses éléments sont nuls.

Si V et W sont deux espaces supplémentaires de $\mathbb{C}^n$, on note p_V la projection sur V parallèlement à W : pour $x = x_V + x_W$ avec $x_V \in V$ et $x_W \in W$, $p_V(x) = x_V$. Pour un endomorphisme u de $\mathbb{C}^n$, on note u_V sa restriction à V.

De sorte que si i_V représente l'injection de V dans $\mathbb{C}^n$, $u_V(y) = u(i_V(y))$ pour tout $y \in V$.

I Algèbres de Lie

On appelle crochet de Lie de deux éléments X et Y de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ la matrice, notée $[X,Y]$, définie par

$$[X,Y] = XY - YX.$$

Définition 1 *Soit $\mathcal{U}$ un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$. On note $[\mathcal{U}]$ l'espace vectoriel engendré par les crochets de Lie $[X,Y]$ lorsque X et Y décrivent $\mathcal{U}$. On dit que $\mathcal{U}$ est une algèbre de Lie lorsque*

$$[\mathcal{U}] \subset \mathcal{U}.$$

Soit $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ deux algèbres de Lie qui vérifient

$$[\mathcal{U}] \subset \mathcal{V} \subset \mathcal{U}.$$

On souhaite prouver le théorème suivant.

Théorème 1 *Si $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ est une colonne propre pour toute matrice M dans $\mathcal{V}$ et si A est une matrice dans $\mathcal{U}$ alors AX est soit la matrice colonne nulle, soit une matrice colonne propre pour toute matrice M dans $\mathcal{V}$. De plus, si pour $M \in \mathcal{V}$, $MX = \lambda X$ alors $M(AX) = \lambda(AX)$.*

Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ une matrice colonne propre pour toute matrice M dans $\mathcal{V}$, et soit A une matrice de $\mathcal{U}$.

❏ 1 - Établir l'existence d'une forme linéaire λ sur $\mathcal{V}$, à valeurs dans $\mathbb{C}$, telle que pour tout $M \in \mathcal{V}$, $MX = \lambda(M)X$.

❏ 2 - Montrer que pour tout $M \in \mathcal{V}$, $[M,A]$ appartient à $\mathcal{V}$.

On considère la suite de matrices colonnes $(X_k, k \geq 0)$ définie par

$$X_0 = X, \quad X_{k+1} = AX_k, \text{ pour tout } k \geq 0.$$

Pour $M \in \mathcal{V}$, on considère la suite de nombres complexes $(\lambda_k(M), k \geq 0)$ définie par

$$\lambda_0(M) = \lambda(M)$$
$$\lambda_{k+1}(M) = \lambda_k([M,A]), \text{ pour tout } k \geq 0.$$

❏ 3 - Démontrer, pour tout entier $i \geq 0$ et pour tout $M \in \mathcal{V}$, les identités suivantes :

⚠ C_i^j désigne ici $\binom{i}{j}$

$$MX_i = \sum_{j=0}^{i} C_i^j \, \lambda_{i-j}(M)\, X_j \tag{1}$$

$$[M,A]X_i = \sum_{j=0}^{i} C_i^j \, \lambda_{i-j+1}(M)\, X_j. \tag{2}$$

❏ 4 - On identifie dorénavant matrices colonnes et vecteurs de $\mathbb{C}^n$. Démontrer qu'il existe un plus grand entier q tel que la famille de vecteurs $\{X_0, X_1, X_2, \cdots, X_q\}$ soit libre.

On note G l'espace vectoriel engendré par la famille $\{X_0, X_1, X_2, \cdots, X_q\}$.

❏ 5 - Montrer que $\overline{M}_G$, $\overline{A}_G$ et $\overline{[M,A]}_G$ sont des endomorphismes de G.

❏ 6 - Calculer la trace de $\overline{[M,A]}_G$.

❏ 7 - Quelle est la matrice de $\overline{[M,A]}_G$ dans la base $\{X_0, X_1, X_2, \cdots, X_q\}$?

❏ 8 - Pour $M \in \mathcal{V}$, que vaut $\lambda([M,A])$?

❏ 9 - Établir le théorème 1.

II Algèbres de Lie résolubles

Définition 2 *Soit $\mathcal{U}$ une algèbre de Lie et p un entier naturel non nul. On dit que $\mathcal{U}$ est une algèbre de Lie résoluble de longueur p lorsqu'il existe des algèbres de Lie $\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1, \cdots, \mathcal{U}_p$ telles que :*

$$\{0\} = \mathcal{U}_p \subset \mathcal{U}_{p-1} \subset \cdots \mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U}_0 = \mathcal{U} \tag{A}$$

$$[\mathcal{U}_i] \subset \mathcal{U}_{i+1} \textit{ pour tout } i \in \{0, \cdots, p-1\}. \tag{B}$$

On se propose de montrer le théorème suivant.

Théorème 2 *$\mathcal{U}$ est une algèbre de Lie résoluble si et seulement s'il existe une matrice P inversible telle que, pour tout $M \in \mathcal{U}$, $P^{-1}MP$ est triangulaire supérieure.*

Soit P une matrice inversible de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ et $\mathcal{T}_P$ l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ telles que $P^{-1}MP$ soit triangulaire supérieure.

❏ 10 - Traduire la propriété « il existe une matrice P inversible telle que pour tout $M \in \mathcal{U}$, $P^{-1}MP$ est triangulaire supérieure » en une propriété sur les endomorphismes canoniquement associés aux éléments de $\mathcal{U}$.

❏ 11 - Montrer que $\mathcal{T}_P$ est une algèbre de Lie résoluble de longueur n.

On pourra considérer les sous-espaces $\mathcal{N}_k$ $(0 \leq k \leq n)$ tels que $\mathcal{N}_0 = \mathcal{T}_P$ et pour tout entier k $(1 \leq k \leq n)$, $\mathcal{N}_k$ est l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{T}_P$ telles que les k diagonales supérieures $D_0(P^{-1}MP)$, $D_1(P^{-1}MP)$, ..., et $D_{k-1}(P^{-1}MP)$ sont nulles.

Dans les questions 12 à 17, on suppose que $\mathcal{U}$ est une algèbre de Lie résoluble de longueur $p = 1$.

❏ 12 - Montrer que pour tout $M, M' \in \mathcal{U}$, on a $MM' = M'M$.

❏ 13 - Soit r un entier non nul et une famille $M_1, M_2, \cdots, M_r$ d'éléments de $\mathcal{U}$. Montrer qu'il existe un vecteur propre commun aux endomorphismes $\overline{M}_1, \overline{M}_2, \cdots, \overline{M}_r$.

❏ 14 - Montrer qu'il existe au moins un vecteur propre commun à tous les endomorphismes $\{\overline{M},\ M \in \mathcal{U}\}$.

On note dorénavant :

$$\overline{\mathcal{U}} = \{\overline{M},\ M \in \mathcal{U}\}.$$

Soit F et H deux espaces supplémentaires de $\mathbb{C}^n$ et u et v deux endomorphismes de $\mathbb{C}^n$. De plus, on suppose, d'une part, que F est stable par u et v et, d'autre part, que u et v commutent.

❏ 15 - Montrer les relations suivantes :

$$p_H\, u = p_H\, u\, p_H \text{ et } p_H\, v = p_H\, v\, p_H.$$

❏ 16 - Montrer que $p_H\, u\, p_H$ et $p_H\, v\, p_H$ commutent puis que $p_H\, u_H$ et $p_H\, v_H$ commutent.

❏ 17 - En procédant par récurrence sur n, établir le théorème 2 dans le cas $p = 1$.

Soit, maintenant, $\mathcal{U}$ une algèbre de Lie résoluble de longueur $p > 1$.

On suppose établi que pour toute algèbre de Lie résoluble de longueur inférieure strictement à p, il existe un élément $P \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$, inversible, tel que pour toute matrice M dans cette algèbre, $P^{-1}MP$ soit triangulaire supérieure.

❏ 18 - Montrer qu'il existe au moins un vecteur propre commun à tous les endomorphismes $\overline{M}, M \in \mathcal{U}_1$.

Soit X l'un de ces vecteurs propres. On note E l'espace vectoriel engendré par X et les éléments de la forme

$$\overline{A_1} \ldots \overline{A_k} X$$

où k est un entier non nul, $A_j \in \mathcal{U}$ pour tout j.

❏ 19 - Montrer que E est un espace vectoriel stable par tous les éléments de $\overline{\mathcal{U}}$ et que tous les éléments de E sont des vecteurs propres communs à tous les endomorphismes de $\overline{\mathcal{U}_1}$.

Soit $M, M' \in \mathcal{U}$.

❏ 20 - Montrer que $\overline{[M, M']}_E$ est une homothétie de trace nulle.

❏ 21 - Que peut-on en déduire?

Le théorème 2, dans le cas général, se prouve alors par les mêmes raisonnements qu'aux questions 14 et 17.

Fin du problème