CCINP Maths 1 MP 2018

Soit $t \in [-1;1]$.

Q1. (a) On applique la formule de Taylor-Lagrange à $f = \exp$ sur $[0,t]$, f étant de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On obtient $\left| e^t - \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} f^{(k)}(0) \right| \leqslant \frac{|t|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{[0,t]} |f^{(n+1)}|$

donc $|e^t - e_n(t)| \leqslant \frac{1}{(n+1)!} \sup_{[-1;1]} (\exp) \leqslant \frac{e}{(n+1)!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

donc $\boxed{e_n \text{ converge simplement vers l'exponentielle sur } [-1;1]}$

(b) le majorant $\frac{e}{(n+1)!}$ obtenu en (a) ne dépendant pas de x, on a directement que $\boxed{e_n \xrightarrow{CU} \exp \text{ sur } [-1;1].}$

(c) Si $x \in [0;1]$, $-x^2 \in [-1;1]$ donc

$|\varphi_n(x) - \varphi(x)| = |e_n(-x^2) - e^{-x^2}| \leqslant \underbrace{\| e_n - \exp \|_{\infty,[-1;1]}}_{\text{ne dépend pas de } x.} \longrightarrow 0$ d'après (b)

donc $\boxed{\varphi_n \xrightarrow{CU} \varphi \text{ sur } [0,1].}$

(d) Comme
- $\forall n \in \mathbb{N}$, φ_n est continue sur $[0,1]$
- $\varphi_n \xrightarrow{CU} \varphi$ sur $[0;1]$

alors φ continue sur $[0,1]$ et

$$\int_0^1 \varphi_n(x)\,dx \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \varphi(x)\,dx = I \qquad (*).$$

Mais $\int_0^1 \varphi_n(x)\,dx = \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} \frac{(-x^2)^k}{k!}\,dx$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^1 x^{2k}\,dx$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \left[\frac{x^{2k+1}}{2k+1} \right]_0^1 = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \times \frac{1}{2k+1}$$

NB :
La convergence de la série est assurée par $(*)$ mais se retrouve soit par le théorème spécial sur les séries alternées : $\left(\frac{1}{(2k+1)k!}\right)$ décroit vers 0

Soit par absolue convergence :

$$\frac{1}{(2k+1)k!} = o\Big(\underbrace{\frac{1}{k^2}}_{\geq 0}\Big) \text{ lorsque } k \to +\infty \quad \text{et } \sum \frac{1}{k^2} \text{ converge.}$$

par critère de Riemann.

Ainsi, on obtient bien $\boxed{I = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)\,k!}}$.

Q2. Le théorème spécial sur les séries alternées s'appliquant

$I - S_n = R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)k!}$ est le reste d'ordre n.

On sait que $\boxed{|I - S_n| = |R_n| \leq \left| \frac{(-1)^{n+1}}{(2(n+1)+1)\,(n+1)!} \right| = \frac{1}{(2n+3)\,(n+1)!}}$.

Q3.

```
def factorielle (n):
    if n == 0 :
        return 1
    else :
        return n * factorielle (n-1)
```

Q4. Il est évidemment déraisonnable d'utiliser la fonction précédente dans un tel script !

```
def rang (precision) :
    "renvoie le 1er entier n tel que 1/((2n+3)(n+1)!) ≤ precision"
    n = 0
    facto = 1 # va contenir (n+1)!
    while precision * (2*n +3) * facto < 1 :
        n += 1
        facto *= n + 1
    return n
rang (1e-6)
```

Q5. $f_n(x) = e^{n\ln\left(1-\frac{x^2}{n}\right)}$ Soit $x \geqslant 0$.

avec $-\frac{x^2}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $n\ln\left(1-\frac{x^2}{n}\right) \sim -n \times \frac{x^2}{n} = -x^2$

donc $n\ln\left(1-\frac{x^2}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -x^2$

donc $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-x^2}$ par continuité de exp.

Finalement, $\boxed{f_n \xrightarrow{CS} \varphi : x \mapsto e^{-x^2} \text{ sur } [0;+\infty[.}$

Q6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$\forall x \in [0,1]$, $|f_n(x)| = e^{n\ln\left(1-\frac{x^2}{n}\right)}$

Or $\forall u > -1$, $\ln(1+u) \leq u$. En effet, $g : u \mapsto \ln(1+u) - u$

dérivable sur $]-1;+\infty[$ et $g' : u \mapsto \frac{1}{1+u} - 1 = -\frac{u}{1+u}$

u	-1		0	
g'	‖	$+$	0	$-$
g	‖	$\nearrow$	0	$\searrow$

donc $g \leq 0$ sur $]-1;+\infty[$.

donc $\boxed{\forall x \in [0,1],\ |f_n(x)| \leq e^{n\times\left(-\frac{x^2}{n}\right)} = e^{-x^2}}$ par croissance de exp.

(suite)

Pour les 5/2 : Les f_n sont C^0 sur $[0;1]$

$f_n \xrightarrow{CS} \varphi$ sur $[0,1]$ d'après Q5.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in [0,1]$, $|f_n(x)| \leq \varphi(x)$ avec φ intégrable (continue sur le segment $[0,1]$)

le théorème de convergence dominée s'applique.

donc (pour tous)

$$\int_0^1 f_n(t)\,dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 \varphi(t)\,dt = I.$$

Or $\int_0^1 f_n(t)\,dt = \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot \left(-\frac{x^2}{n}\right)^k$ par la formule du binôme

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times \frac{(-1)^k}{n^k} \int_0^1 x^{2k}\,dx = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{(2k+1)n^k}$$

donc

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{(2k+1)n^k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} I.}$$

Q7. On a, $\forall i,j \in [\![0;n]\!]$, $l_i(x_j) = \delta_{i,j}$ donc

$\forall j \in [\![0;n]\!]$, $L_n(f)(x_j) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\,\delta_{i,j} = f(x_j)$

et $\forall i \in [\![0;n]\!]$, $\deg l_i = n$ donc $\deg L_n(f) \leq n$.

$\boxed{L_n(f) \text{ polynôme interpolateur de } f \text{ aux } x_i.}$

Si P, Q conviennent, $\deg(P-Q) \leq n$ et $P-Q$ a $n+1$ racines distinctes, donc $P=Q$: $\boxed{\text{unicité}}$

Q8.

```
def lagrange(x, y, val):
    n = len(x)
    def p(i, val):
        " renvoie  ∏_{k≠i} (val - x_k) / ∏_{k≠i} (x_i - x_k) "
        resultat = 1
        for k in range(n):
            if k != i :
                resultat *= (val - x[k]) / (x[i] - x[k])
        return resultat
    resultat = 0
    for i in range(n):
        resultat += y[i] * p(i, val)
    return resultat.
```

Q9. $\boxed{V = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^n \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^n \end{pmatrix}}$ matrice de Vandermonde.

5

La complexité de l'algorithme du pivot de Gauss est $\boxed{O(n^3)}$.

d'après le cours d'informatique.

Q10. Notons $a_0, \dots, a_p$ les zéros de ϕ avec

$a \leq a_0 < a_1 < \dots < a_p \leq b$.

Pour tout $k \in [\![0; p-1]\!]$, ϕ continue sur $[a_k; a_{k+1}]$

dérivable sur $]a_k; a_{k+1}[$

$\phi(a_k) = \phi(a_{k+1}) = 0$.

Par théorème de Rolle, on a un zéro $a'_k \in]a_k; a_{k+1}[$ de ϕ'.

Ainsi ϕ' $p-1$ fois dérivable s'annule en $p-1$ points distincts.

On raisonne donc par récurrence :

- Si $p=0$, il n'y a rien à faire
- Soit $p \in \mathbb{N}^*$ tel que c'est vrai au rang $p-1$.

Alors, comme ci-dessus, ϕ' peut recevoir l'hypothèse de récurrence : on a $c \in]a, b[$ tel que $(\phi')^{(p-1)}(c) = \phi^{(p)} = 0$, ce qui établit la récurrence.

Ainsi, $\boxed{\exists c \in]a, b[, \ \phi^{(p)}(c) = 0}$.

Q11_ Si $x \in \sigma$, $\mathcal{P}_x$ s'écrit $0=0$. (6)

Ainsi, tout $c_x \in]a,b[$ convient, $\boxed{\mathcal{P}_x \text{ est vraie.}}$

Q12_ On prend $\boxed{\lambda = \dfrac{f(x) - L_n(f)(x)}{\Pi_\sigma(x)}}$ ce qui est licite car

$\Pi_\sigma(x) \neq 0$ car $x \notin \sigma$.

Q13_ F s'annule en x vu le choix de λ et en chaque x_i car $P_n(f)$ polynôme interpolateur de f aux x_i et les x_i sont racines de Π_σ. Comme $x \notin \sigma$, cela donne bien $n+2$ zéros.

Comme $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a,b])$, $F \in \mathcal{C}^{n+1}([a,b])$, en particulier $n+1$ fois dérivable et par Q10, avec $p = n+1$, on a $c_x \in]a,b[$ tel que $F^{(n+1)}(c_x) = 0$.

Or $L_n(f) \in \mathbb{R}_n[X]$ donc $(L_n(f))^{(n+1)} = 0$

et Π_σ unitaire et de degré $n+1$, donc $\Pi_\sigma^{(n+1)} = (n+1)!$

Finalement, $F^{(n+1)}(c_x) = f^{(n+1)}(c_x) - (n+1)!\,\lambda = 0$

donc $\lambda = \dfrac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}$.

On a donc $c_x \in]a,b[$ tel que $F(x) = 0 = f(x) - L_n(f)(x) - \dfrac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}\Pi_\sigma(x)$

Soit $\boxed{\mathcal{P}_x \text{ vraie.}}$

Q14_ $f^{(n+1)}$ continue sur le segment $[a,b]$

donc $\boxed{\text{bornée}}$ et $\|f^{(n+1)}\|_\infty$ existe

et si $x\in[a,b]$, vu Q13,

$$|f(x)-L_n(f)(x)| = \left|\frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}\pi_\sigma(x)\right|$$

$$\leq \frac{\|f^{(n+1)}\|_\infty}{(n+1)!}|\pi_\sigma(x)|$$

avec $|\pi_\sigma(x)| = \prod_{i=0}^{n}|x-x_i| \leq (b-a)^{n+1}$ car tous les x_i et x

sont dans $[a,b]$ donc $\forall i,\ d(x,x_i)\leq d(a,b)$.

Finalement, $\forall x\in[a,b]$, $|f(x)-L_n(f)(x)| \leq \underbrace{\frac{K^{n+1}}{(n+1)!}\|f^{(n+1)}\|_\infty}_{\text{ne dépend pas de } x}$

où $\boxed{K=b-a}$

donc $\boxed{\|f-L_n(f)\|_\infty \leq \frac{K^{n+1}}{(n+1)!}\|f^{(n+1)}\|_\infty.}$

Q15. Si $f=\sin$, $|f^{(n+1)}| = |\sin|$ ou $|\cos|$ selon la parité de n.

dans tous les cas, $\|f^{(n+1)}\|\leq 1$. (et même $=$)

Donc (avec Q14) $\|f-L_n(f)\|_\infty \leq \frac{K^{n+1}}{n+1} \longrightarrow 0$ par croissances comparées

donc $\boxed{L_n(\sin)\xrightarrow{CU}\sin}$

Q.16 $f(x)=\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^{2k} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n})$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Or, par formule de Taylor-Young (f de classe $\mathcal{C}^\infty$) et unicité des coefficients

d'un développement limité, $\forall k\in\mathbb{N}$, $(-1)^k = \frac{f^{(2k)}(0)}{(2k)!}$

En particulier,

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \quad \|f^{(2k)}\|_\infty \geqslant |f^{(2k)}(0)| = (2k)!}$$

Q17_ $P_0 = \mu$ avec

$$\|P_0\|^2 = 1 = \langle P_0, P_0 \rangle = \int_{-1}^{1} \mu^2 dt = 2\mu^2 \quad \text{donc } \mu = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

et $\boxed{P_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}}$

$$Q_1 = X - \lambda \quad \text{avec} \quad \langle X-\lambda, 1 \rangle = 0 = \int_{-1}^{1} (\underbrace{t}_{\text{impair}} - \lambda)\, dt$$

$$= 0 - 2\lambda$$

donc $\lambda = 0$ (on a $(1, X)$ déjà orthogonale)

et $P_1 = \dfrac{Q_1}{\|Q_1\|}$ où $\|Q_1\|^2 = \langle X, X \rangle = \int_{-1}^{1} t^2 dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{3}$

donc $\boxed{P_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}\, X}$

Q18_ Comme $(P_0, \dots, P_n)$ est orthonormale, P_n est orthogonal à tous les P_i pour $i \in [\![0; n-1]\!]$. Or chaque P_i est de degré i d'après l'énoncé, donc $(P_0, \dots, P_{n-1})$ famille de n polynômes de degré au plus $n-1$, à degrés étagés* donc libre et $n = \dim \mathbb{R}_{n-1}[X]$ donc $(P_0, \dots, P_{n-1})$ base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Finalement, on a bien $\boxed{P_n \text{ orthogonal à } \mathbb{R}_{n-1}[X].}$

(*) Mieux : Famille orthonormale donc libre !

Q19_ $\int_{-1}^{1} P_n(t)dt = \langle P_n, 1 \rangle = 0$ d'après Q18 car $1 \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Si P_n n'avait pas de racine dans $[-1;1]$, car il est continu, le théorème des valeurs intermédiaires nous assure qu'il est de signe constant. Et, toujours par continuité, on aurait alors (positivité améliorée) $\forall t \in [-1;1]$, $P_n(t) = 0$, ce qui est contradictoire. $\boxed{P_n \text{ s'annule.}}$

Q20. $\int_{-1}^{1} H(t)dt = \int_{-1}^{1} Q(t)P_n(t)dt$

$= \langle Q, P_n \rangle$ avec $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ car $p<n$.

donc $\boxed{\int_{-1}^{1} H(t)dt = 0}$ d'après Q18.

vu l'énoncé, dans $H = QP$, toutes les racines ont une multiplicité paire. donc H est de la forme

$$H = R \times \prod_{k=1}^{r} (X - a_k)^{2\alpha_k}$$

où R n'a pas de racine réelle
$\forall k \in [\![1;r]\!]$, $\alpha_k \in \mathbb{N}^*$
les a_k 2 à 2 distincts.

donc R est de signe constant
et H aussi.

Comme, de plus, $t \mapsto H(t)$ continue, par positivité améliorée, $\forall t \in [-1;1]$, $H(t) = 0$.

H aurait donc une infinité de racines donc $H = 0 = Q \times P_n$.

Comme par hypothèse, $Q \neq 0$, $P_n \neq 0$ ($\mathbb{R}[X]$ intègre)

ce qui entre en contradiction avec le fait que P_n normé.

Le nombre de racine de P_n dans $[-1;1]$ de multiplicité impaire vérifie

donc $p \geqslant n$ et comme $p = n$. Cette multiplicité vaut

donc nécessairement 1 : $\boxed{P_n \text{ scindé à racines simples dans } [-1;1]}$

Pour justifier que toutes les racines sont bien dans $[-1;1]$, il suffit d'adapter le raisonnement en ne considérant, pour $t_1, \dots, t_p$, que les racines de multiplicité impaire dans $[-1;1]$ et la conclusion reste valable (énoncé ambigu.) les autres racines sont dans R qui est bien de signe constant sur $[-1;1]$

Q21 - Changement de variable $x = x_k + (t+1)\dfrac{x_{k+1} - x_k}{2}$ $(\mathcal{C}^1)$

« $dx = \dfrac{x_{k+1} - x_k}{2}\, dt$ » Soit $t = 2\dfrac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k} - 1$ d'où les nouvelles bornes.

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\, dx = \int_{-1}^{1} g(t) \times \frac{x_{k+1} - x_k}{2}\, dt$$

soit $\boxed{\displaystyle\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx = \frac{x_{k+1} - x_k}{2} \int_{-1}^{1} g(t)\,dt}$

Q.22 - Si $P \in \mathbb{R}_n(X)$, par unicité du polynôme interpolateur, $L_n(P) = ?$. Ainsi, $\boxed{J(P) = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)\,dt}$

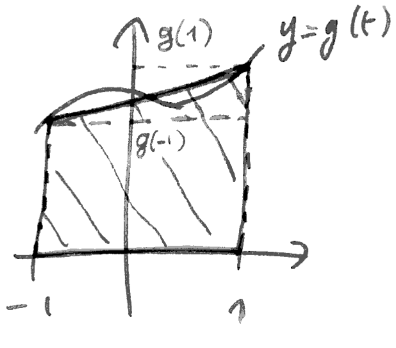
Q 23 - $l_0(x) = \dfrac{x - t_1}{t_0 - t_1} = -\dfrac{1}{2}(x-1)$

$l_1(x) = \dfrac{x - t_0}{t_1 - t_0} = \dfrac{1}{2}(x+1)$

$\alpha_0 = \displaystyle\int_{-1}^{1} l_0(t)\,dt = -\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(t-1)\,dt = -\frac{1}{2}[0-2]$ donc $\boxed{\alpha_0 = 1.}$

$\alpha_1 = \displaystyle\int_{-1}^{1} l_1(t)\,dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(t+1)\,dt = \frac{1}{2}[0+2]$ donc $\boxed{\alpha_1 = 1.}$

$$\boxed{\int_{-1}^{1} g(t)\,dt \approx g(-1) + g(1)}$$



(en rouge)

aire du trapèze, si $g(-1) \leq g(1)$ (arbitraire)

= aire du rectangle + aire du triangle

$= 2\,g(-1) + \dfrac{2 \times (g(1) - g(-1))}{2}$

$= g(-1) + g(1)$

Q24_ Comme $Q P_{n+1} = P - R$

et $\deg R < \deg P_{n+1} = n+1$ vu la partie 3,

$\deg(Q P_{n+1}) \leq \max(\deg P, \deg R) \leq \max(2n+1, n)$

donc $\deg Q + \underbrace{\deg(P_{n+1})}_{=n+1} \leq 2n+1$ donc $\deg Q \leq n$. $(*)$

donc $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ et vu la question 18, $P_{n+1} \perp Q$.

Autrement dit, $\int_{-1}^{1} Q(t) P_{n+1}(t)\, dt = 0$.

Par ailleurs, les t_i étant les racines de P_{n+1},

$L_n(Q P_{n+1}) = 0_{\mathbb{R}[X]}$ donc $J(Q P_{n+1}) = 0$. $(**)$

On a donc bien $\boxed{J(Q P_{n+1}) = \int_{-1}^{1} Q(t) P_{n+1}(t)\, dt} = 0$

Remarquons aussi que par linéarité de l'évaluation, $f \mapsto L_n(f)$ est linéaire, donc

$L_n(P) = L_n(Q P_{n+1} + R) = L_n(Q P_{n+1}) + L_n(R)$
$= L_n(R)$

donc $J(P) = \int_{-1}^{1} L_n(R)(t)\, dt = J(R) = \int_{-1}^{1} R(t)\, dt$ par Q22 avec $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ $(*)$

$= \int_{-1}^{1} \left(Q(t) P_{n+1}(t) + R(t)\right) dt$ vu $(**)$

donc $\boxed{J(P) = \int_{-1}^{1} P(t)\, dt.}$

Ou, plus simple (?) : J est alors linéaire donc

$J(P) = J(Q P_{n+1}) + J(R) = \int_{-1}^{1} Q P_{n+1} + \int_{-1}^{1} R$ vu $*$ et Q 22
$= \int_{-1}^{1} P(t)\, dt$.

Q25 – Si $i \in [\![0;n]\!]$,

$$\alpha_i = \int_{-1}^{1} l_i(t)dt$$

On a $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \times 1 = J(1)$

Or $L_n(1) = 1$ (polynôme de degré $\leq n$ valant 1 aux t_i)

donc $J(1) = \int_{-1}^{1} t = 2$

donc $\boxed{\sum_{i=0}^{n} \alpha_i = 2.}$ (cohérent avec Q.23).

Pour montrer que $\alpha_i > 0$, on pense utiliser Q24.

Pour isoler α_i dans $J(g) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j g(t_j)$, il nous faut g telle que $g(t_j) = \delta_{i,j}$

$g = l_i$ convient mais on obtient alors $\alpha_i = \int_{-1}^{1} l_i(t)dt$ ce qui ne nous avance pas beaucoup.

On essaye alors $g = l_i^2$: polynôme de degré $2n \leq 2n+1$.

Or $J(l_i^2) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j \underbrace{l_i^2(t_j)}_{=\delta_{ij}} = \alpha_i$

$= \int_{-1}^{1} l_i^2(t)\,dt$ par Q25

> 0 car l_i^2 $\mathcal{C}^0$, positive et non ident. nulle sur $[-1;1]$.

donc $\boxed{\forall i \in [\![0;n]\!]\ \alpha_i > 0.}$