

Caractérisation des comatrices

1. Regarde les n^2 équations polynomiales qui définissent les coefficients de $\varphi(t) = \sum_{i=0}^r t^i A_i$: chacune a plus de r racines en étant de degré au plus r , donc

chacun des coefficients de chacune des matrices A_i est nul.

2. (a) Chacun des coefficients de $\text{Com}(A - tI_n)$ est un cofacteur, donc plus ou moins un mineur qui est un déterminant de taille $n - 1$ de type polynôme caractéristique dans lequel t apparaît au plus une fois dans chaque ligne et colonne.

La formule du déterminant ($\det M = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{n-1}} \varepsilon(\sigma) m_{\sigma(1),1} \dots m_{\sigma(n-1),n-1}$) donne une combinaison linéaire de termes polynomiaux de degré au plus $n - 1$, donc chaque coefficient de $\text{Com}(A - tI_n)$ est un terme polynomial de degré au plus $n - 1$ en t .

On a donc bien des matrices R_0, \dots, R_{n-1} telles que, pour tout $t \in \mathbb{C}$, $[\text{Com}(A - tI_n)]^T = \sum_{i=0}^{n-1} t^i R_i$.

L'unicité provient de la première question car si R_0, \dots, R_{n-1} d'une part et S_0, \dots, S_{n-1} d'autre part conviennent, alors pour tout $t \in \mathbb{C}$, $\sum_{i=0}^{n-1} t^i (R_i - S_i) = 0$ et donc pour tout i , $R_i = S_i$.

- (b) Comme 0 est racine de $\chi_A(0) - \chi_A$, X divise $\chi_A(0) - \chi_A$ et le polynôme P est bien défini. On a $XP = (-1)^n (\chi_A(0) - \chi_A)$ donc, en évaluant en A^T , $A^T P(A^T) = (-1)^n (\chi_A(0)I_n - \chi_A(A^T))$. Or A et A^T ont même polynôme caractéristique car le déterminant est invariant par transposition. Donc $\chi_A(A^T) = \chi_{A^T}(A^T) = 0_n$ d'après le théorème de Cayley-Hamilton. Ainsi,

$$A^T P(A^T) = (-1)^n \chi_A(0)I_n = (-1)^n \det(-A)I_n = (\det A)I_n.$$

On fait une disjonction de cas selon l'inversibilité de A (donc de A^T) :

- Si A est inversible, A^T l'est et on a alors

$$P(A^T) = (\det A)(A^T)^{-1} = ((\det A)A^{-1})^T = \text{Com } A$$

d'après la formule de la comatrice.

- Le cas où A n'est pas inversible est vraiment difficile et demande d'utiliser les questions précédentes.

On peut toujours écrire $A^T P_A(A^T) = (\det A)I_n$ quelle que soit la matrice A , où on note plutôt $P = P_A$. $A - tI_n$ est inversible pour tout t qui ne soit pas valeur propre de A qui n'en possède qu'un nombre fini.

En appliquant le cas précédent, on obtient, pour $t \notin \text{Sp } A$, $P_{A-tI_n}((A-tI_n)^T) = \text{Com}(A-tI_n)$. En transposant, on obtient $P_{A-tI_n}((A-tI_n)) = [\text{Com}(A-tI_n)]^T$ (par linéarité de la transposée et $BC^T = C^T B^T$, on a bien pour tout polynôme Q et matrice carrée B , $Q(B) = Q(B^T)$.)

Donc, d'après la question précédente, on a des matrices R_0, \dots, R_{n-1} telles que

$$P_{A-tI_n}(A-tI_n) = \sum_{i=0}^{n-1} t^i R_i. \quad (1)$$

Écrivons $\chi_{A-tI_n} = \det(XI_n - (A-tI_n)) = \chi_A(X+t)$, donc $P_{A-tI_n} = (-1)^n \frac{\chi_A(t) - \chi_A(X+t)}{X}$.

On peut poser $\chi_A = \sum_{i=0}^n a_i X^i$. Alors $P_{A-tI_n} = (-1)^n \sum_{i=1}^n a_i \frac{t^i - (X+t)^i}{X} = (-1)^{n+1} \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{i-1} a_i t^j (X+t)^{i-1-j}$ et

$$P_{A-tI_n}(A-tI_n) = (-1)^{n+1} \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{i-1} a_i t^j A^{i-1-j} = \sum_{j=0}^{n-1} \left((-1)^{n+1} \sum_{i=j+1}^n a_i A^{i-1-j} \right) t^j. \quad (2)$$

Par (1) et (2) et par la question 1, $\mathbb{C} \setminus \text{Sp} A$ étant infini, $\text{Com} A^\top = R_0 = (-1)^{n+1} \sum_{i=1}^n a_i A^{i-1} = P_A(A)$ donc en transposant, $\text{Com} A = P(A^\top)$.

3. (a) Si A est de rang n , elle est inversible et, avec la formule de la comatrice, $\text{Com} A$ l'est aussi donc $\text{Com} A$ est de rang n .

De plus, $\text{Com} A = (\det A)(A^{-1})^\top = (\det A)(A^\top)^{-1}$ et comme $\text{Com} A$ est inversible, on a aussi

$$\text{Com}(\text{Com} A) = (\det(\text{Com} A))((\text{Com} A)^\top)^{-1} = \frac{\det(\text{Com} A)}{\det A} A.$$

Or, en prenant le déterminant de la formule de la comatrice, on obtient

$$\det A \det(\text{Com} A) = \det((\det A)I_n) = (\det A)^n$$

donc $\det(\text{Com} A) = (\det A)^{n-1}$ (avec $\det A \neq 0$).

Finalement, $\text{Com}(\text{Com} A) = (\det A)^{n-2} A$.

- (b) Comme $(\text{Com} A) \times A^\top = (\det A)I_n = 0_n$, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, L_i^\top est la i^{e} colonne de A^\top et donc $(\text{Com} A) \times L_i^\top$ est la i^{e} colonne de 0_n soit la colonne nulle.

Ainsi, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $L_i^\top \in \text{Ker}(\text{Com} A)$. Comme A^\top est de rang $n-1$, la famille de ses colonnes l'est aussi, donc $\dim(\text{Ker}(\text{Com} A)) \geq n-1$ et comme $\text{Com} A$ n'est pas nulle, car au moins un des mineurs de A est non nul vu que $\text{rg} A = n-1$, on a $\dim(\text{Ker}(\text{Com} A)) = n-1$, puis, par théorème du rang, $\text{rg}(\text{Com} A) = 1$.

- (c) Si $\text{rg} A \leq n-2$, alors tous ses mineurs sont nuls donc $\text{Com} A = 0_n$.

4. (a) On suppose M et N sont inversibles, donc MN l'est. Alors

$$\text{Com}(MN) = \det(MN)((MN)^{-1})^\top = \det(M)\det(N)(N^{-1}M^{-1})^\top = \det(M)\det(N)(M^{-1})^\top(N^{-1})^\top$$

donc $\text{Com}(MN) = \text{Com} M \text{Com} N$.

- (b) La question revient à montrer que si $|t|$ est assez petit, alors $M(t) = M - tI_n$ et $N(t) = N - tI_n$ sont inversibles, donc $t \notin \text{Sp} M \cap \text{Sp} N$. Or M et N ne possèdent qu'un nombre fini de valeurs propres non nulles. Il suffit de prendre $|t|$ strictement plus petit que $\min_{\lambda \in (\text{Sp} M \cup \text{Sp} N) \setminus \{0\}} |\lambda|$ si $\text{Sp} M \cup \text{Sp} N \neq \{0\}$ et t quelconque sinon. Alors $M(t)$ et $N(t)$ sont inversibles et la question précédente donne

$$\text{Com}(M(t)N(t)) = \text{Com}(M(t))\text{Com}(N(t)).$$

- (c) Les coefficients de la comatrice sont des cofacteurs qui sont eux-mêmes des combinaisons linéaires de produits de coefficients de la matrices.

Donc lorsque $t \rightarrow 0$, $\text{Com}(M(t)) \rightarrow \text{Com} M$, $\text{Com}(N(t)) \rightarrow \text{Com} N$ et $\text{Com}(M(t)N(t)) \rightarrow \text{Com}(MN)$ en regardant coefficients à coefficients.

Ensuite, le produit matriciel donnant des somme de produit, on va bien avoir, toujours coefficients à coefficients, $\text{Com}(M(t))\text{Com}(N(t)) \rightarrow \text{Com} M \text{Com} N$.

Finalement, par unicité de la limite, en utilisant la question précédente, $\text{Com}(MN) = \text{Com} M \text{Com} N$.

Autre rédaction possible : utiliser 2.a pour voir l'égalité de la question précédente comme une écriture

$\sum_{i=0}^{2n-2} t^i R_i = \sum_{i=0}^{2n-2} t^i S_i$ pour une infinité de t , et déduire de la première question que l'égalité est aussi vraie pour $t = 0$, ce qui permet de conclure.

(d) Si M est une matrice de projection, $M^2 = M$ et avec la question précédente,

$$\text{Com } M = \text{Com}(M^2) = (\text{Com } M)^2$$

donc $\text{Com } M$ est aussi une matrice de projection.

5. (a) Soit p projection canoniquement associée à A . Dans une base adaptée à

$$\mathbb{C}^n = \text{Im } p \oplus \text{Ker } p = \text{Ker}(p - \text{id}) \oplus \text{Ker } p,$$

la matrice de p est $B = \begin{pmatrix} I_{n-1} & 0_{n-1,1} \\ 0_{1,n-1} & 0 \end{pmatrix}$ qui est donc semblable à A .

Alors $\chi_A = \chi_B = X(X-1)^{n-1}$.

(b) On utilise 2.b : $\text{Com } A = P(A^\top)$. Or ici $\chi_A(0) - \chi_A(X) = -\chi_A(X)$ donc $P = (-1)^{n-1}(X-1)^{n-1} = (1-X)^{n-1}$. On a donc, $\text{Com } A = (I_n - A^\top)^{n-1}$. Mais A^\top est aussi une matrice de projection car idempotente, et $I_n - A^\top$ qui représente la projection associée est aussi une matrice de projection donc $\text{Com } A = I_n - A^\top$.

(c) Si M est une matrice de projection de rang 1 dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, soit $A = I_n - M^\top$. Alors $A^2 = I_n - 2M^\top + (M^\top)^2$ car I_n et M^\top commutent.

Donc $A^2 = I_n - 2M^\top + (M^\top)^2 = I_n - 2M^\top + M^\top = I_n - M^\top = A$ car M est une matrice de projection.

Ainsi, A est une matrice de projection. Reste à voir que son rang est $n-1$. Or

$$\text{rg } A = \dim(\text{Im } A) = \dim(\text{Im}(I_n - M^\top)) = n - \dim(\text{Ker}(I_n - M^\top)) = n - \dim(\text{Im } M^\top) = n - \text{rg } M^\top = n - \text{rg } M = n - 1$$

car M^\top est aussi une matrice de projection.

Ainsi, avec la question précédente, $\text{Com } A = M$ qui est une comatrice.

6. (a) M est de rang 1 donc 0 valeur propre et $\dim E_0(M) = \dim \text{Ker } M = n-1$.

Donc on a $a \in \mathbb{C}^*$ tel que M est semblable à $\text{diag}(a, 0, \dots, 0)$ et donc

$$a^{-1}M \text{ est une matrice de projection.}$$

(b) Avec 5.c, on a A telle que $a^{-1}M = \text{Com } A$, donc $M = a \text{Com } A$. Soit $b \in \mathbb{C}$ une racine $n-1^{\text{e}}$ de a (il en existe toujours, $n-1 \geq 2$), alors $M = \text{Com}(bA)$ par $n-1$ -linéarité des mineurs de bA .

7. (a) A est de rang 1 donc 0 est valeur propre et le sous-espace propre associé est de dimension $n-1$. Comme A n'est pas diagonalisable, il n'y a pas d'autre valeur propre.

Soit u endomorphisme canoniquement associé à A , F un supplémentaire de $\text{Ker } u$.

Dans une base adaptée à $\text{Ker } u \oplus F = \mathbb{C}^n$, la matrice de u est de la forme $B = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & a_n \end{pmatrix}$.

Mais comme 0 est la seule valeur propre, $a_n = 0$ et on a alors $B^2 = 0$, donc $u^2 = 0$ et $A^2 = 0$.

Comme $u^2 = 0$, $\text{Im } u \subset \text{Ker } u$. Soit $e_1 \neq 0$ un vecteur directeur de la droite $\text{Im } u$. alors (e_1) est une famille libre de $\text{Ker } u$ qu'on complète en (e_1, \dots, e_{n-1}) base de $\text{Ker } u$. Comme $e_1 \in \text{Im } u$ donc on a $e_n \in \mathbb{C}^n$ tel que $u(e_n) = e_1$.

On vérifie que $\text{Ker } u \oplus \text{Vect}(e_n) = \mathbb{C}^n$: on a bien $\dim \text{Ker } u + 1 = n$ et si $x \in \text{Ker } u \cap \text{Vect}(e_n)$, on a $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $x = \lambda e_n \in \text{Ker } u$ et $u(x) = 0 = \lambda u(e_n) = \lambda e_1$ avec $e_1 \neq 0$ donc $\lambda = 0$ puis $x = 0$ donc la somme est bien directe.

Finalement, (e_1, \dots, e_n) est une base de \mathbb{C}^n et par construction, la matrice de u dans cette base est

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ semblable à } A.$$

(b) L'endomorphisme canoniquement associé à $D_1 = \begin{pmatrix} 0 & & & -1 \\ & 1 & & (0) \\ & \dots & \dots & \vdots \\ (0) & & & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$ est

$$v : (x_1, \dots, x_n) \mapsto (-x_n, x_2, \dots, x_{n-1}, 0).$$

Alors $v^2 : (x_1, \dots, x_n) \mapsto (0, x_2, \dots, x_{n-1}, 0)$ donc $v^2 - v : (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_n, 0, \dots, 0)$ donc $D_1^2 - D_1 = A_1$.

Puis $v \circ (v^2 - v) = v^3 - v^2 = v^2 - v^2 = 0$ donc $D_1 A_1 = 0_n$ et comme A_1 est un polynôme en D_1 , elle commute avec D_1 : $A_1 D_1 = 0_n$.

Enfin, dans D_1 , les colonnes 2 à n sont libres (colonnes de la base canonique au signe près) et la première colonne est nulle donc $\text{rg } D_1 = n - 1$.

(c) Soit $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $A = P A_1 P^{-1}$. On pose $D = P D_1 P^{-1}$.

Alors, vu les résultats de la question précédente, $D^2 - D = A$ et $AD = DA = 0$.

Puis $\text{rg}(I_n - D) = \text{rg}(I_n - D_1) = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$.

Puis, comme dans la question précédente $v^2 = v^3$, $D_1^2 = D_1^3$ et $D^2 = D^3$.

(d) On a $\chi_D = \chi_{D_1} = \begin{vmatrix} X & & & 1 \\ & X-1 & & (0) \\ & \dots & \dots & \vdots \\ (0) & & & X-1 \\ & & & & X \end{vmatrix}$ donc $\chi_D = X^2(X-1)^{n-2}$.

Puis avec la question 2.b, $P = (-1)^{n+1} X(X-1)^{n-2} = -X(1-X)^{n-2}$ et $\text{Com } D = -D^T (I_n - D^T)^{n-2}$.

Mais avec la question précédente, pour tout $k \geq 2$, $D^k = D^2$ donc $(D^T)^k = (D^T)^2$ et comme I_n et D^T commutent, par la formule du binôme de Newton,

$$\begin{aligned} \text{Com } D &= - \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} (-1)^k (D^T)^{k+1} = -D^T - \sum_{k=1}^{n-2} \binom{n-2}{k} (-1)^k (D^T)^2 \\ &= -D^T - ((1-1)^{n-2} - 1) (D^T)^2 \end{aligned}$$

et comme $n-2 > 0$, $\text{Com } D = -D^T + (D^T)^2 = A^T$.

(e) Avec les deux questions précédentes, $A = (\text{Com } D)^T = \text{Com}(D^T)$, cette dernière égalité découlant de la définition de la comatrice.

8. D'après 3, les comatrices sont soit inversibles, soit de rang 1, soit nulles.

Réciproquement,

- Si A est inversible, $A = \frac{1}{(\det A)^{n-2}} \text{Com}(\text{Com } A) = \text{Com}(\alpha \text{Com } A)$ où α est une racine $(n-1)^{\text{e}}$ de $\frac{1}{(\det A)^{n-2}}$ donc A est une comatrice.
- Si A est de rang 1, qu'elle soit ou non diagonalisable, c'est une comatrice d'après les questions 6 et 7.

- Si A est nulle, alors $A = \text{Com} 0_n$.

Enfin, les comatrices sont exactement les matrices de rang 0, 1 ou n .

Fin