ESIM 2021 : Caractérisation des comatrices

Soit n un entier au moins égal à 3. Si $A=(a_{ij})\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note $\operatorname{Com} A$ sa comatrice, de terme général C_{ij}, cofacteur de a_{ij} dans A. On rappelle les relations :

$$A\times(\operatorname{Com} A)^{\mathsf{T}}=(\operatorname{Com} A)^{\mathsf{T}}\times A=(\det A)\cdot I_n.$$

On confond polynôme et fonction polynomiale associée, et on note $\chi_A=\det(XI_n-A)$.

On rappelle que le théorème de Cayley-Hamilton dit que le polynôme caractéristique est un polynôme annulateur, c'est-à-dire que $\chi_A(A)=0_n$.

On se propose de caractériser les matrices qui sont des comatrices.

1. Soient $A_0,A_1,\dots,A_r$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et pour tout $t\in\mathbb{C}$, $\varphi(t)=\sum_{i=0}^{r}t^iA_i$.

   Montrer que si φ s'annule pour plus de r valeurs, alors les A_i sont toutes nulles.

2. (a) Si $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, montrer l'existence et l'unicité des matrices $R_0,\dots,R_{n-1}$ telles que :

   $$\forall t\in\mathbb{C},\ [\operatorname{Com}(A-tI_n)]^{\mathsf{T}}=\sum_{i=0}^{n-1}t^iR_i.$$

   (b) Soit P le polynôme défini par $P(t)=(-1)^n\dfrac{\chi_A(0)-\chi_A(t)}{t}$ pour $t\in\mathbb{C}^*$.

   Démontrer $\operatorname{Com} A=P(A^{\mathsf{T}})$.

3. (a) Si A est de rang n, montrer que $\operatorname{Com} A$ est de rang n. Que vaut $\operatorname{Com}\big(\operatorname{Com} A\big)$?

   (b) Si A est de rang $n-1$ et si $L_1,\dots,L_n$ sont les lignes de A, calculer $(\operatorname{Com} A)\times L_i^{\mathsf{T}}$ pour tout i et vérifier que le rang de $\operatorname{Com} A$ est 1.

   (c) Montrer que si le rang de A est au plus $n-2$, alors $\operatorname{Com} A$ est nulle.

4. Soient M et N dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

   (a) Si M et N sont inversibles, montrer que $\operatorname{Com}(MN)=\operatorname{Com} M\operatorname{Com} N$.

   (b) Soient $M(t)=M-tI_n$ et $N(t)=N-tI_n$ pour t complexe. Montrer que, pour tout t de module assez petit, $\operatorname{Com}\big(M(t)N(t)\big)=\operatorname{Com}\big(M(t)\big)\operatorname{Com}\big(N(t)\big)$.

   (c) Vérifier que, pour M et N quelconques, $\operatorname{Com}(MN)=\operatorname{Com} M\operatorname{Com} N$.

   (d) Si M est une matrice de projection, que peut-on dire de $\operatorname{Com} M$?

5. Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, matrice de projection de rang $n-1$.

   (a) Déterminer χ_A.
   (*On pourra utiliser une base de* Im A *et une base de* Ker A.)

   (b) Montrer que $\operatorname{Com} A=I_n-A^{\mathsf{T}}$.

   (c) Si M est une matrice de projection de rang 1 dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, montrer que M est une comatrice.

6. Soit M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, M diagonalisable de rang 1.

   (a) Montrer l'existence de λ complexe tel que λM est une matrice de projection.

   (b) Montrer que M est une comatrice.

7. Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, A non diagonalisable de rang 1.

   (a) Montrer que $A^2=0$ et que A est semblable à $A_1=(\alpha_{ij})$, avec $\alpha_{1n}=1$ et $\alpha_{ij}=0$ sinon.

   (b) Soit $D_1=(\beta_{ij})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, avec $\beta_{ii}=1$ pour $i=2,\dots,n-1$, $\beta_{1n}=-1$ et $\beta_{ij}=0$ dans tous les autres cas.
   Calculer $D_1^2-D_1$, D_1A_1 et A_1D_1.
   Que vaut le rang de D_1 ?

   (c) Montrer l'existence de D de rang $n-1$ telle que $D^2-D=A$, $AD=DA=0$ et I_n-D est de rang 2.
   Comparer D^3 et D^2.

   (d) Montrer que $\chi_D=X^2(X-1)^{n-2}$ et en déduire $\operatorname{Com} D$.

   (e) Montrer que A est une comatrice.

8. Caractériser les éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui sont des comatrices.

FIN DE L'ÉNONCÉ