Exercice 1 : Suites et suites de fonctions - CCINP MPI 2024

1. Si $x \leqslant 0$, $f_n(x) \not\to 0$ donc $\sum f_n(x)$ diverge grossièrement.

   Sinon, $0 \leqslant f_n(x) = o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ par croissances comparées. Donc, par comparaison de séries à termes généraux positifs et critère de Riemann ($2 > 1$), $\sum f_n(x)$ converge.

   Finalement, $\boxed{D = \mathbb{R}_*^+.}$

---

2. On utilise le théorème de continuité des séries de fonctions.

   H1 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $D = \mathbb{R}_*^+$.

   H2 Montrons qu'il y a convergence uniforme au voisinage de tout point.
   Or pour tout $a > 0$, tout $x \in [a, +\infty[$, et tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$\left|f_n(x)\right| = f_n(x) \leqslant f_n(a)$$
   majoration uniforme en x donc $\|f_n\|_{\infty,[a,+\infty[} \leqslant f_n(a)$ qui est un terme général de série convergente d'après la question précédente, donc $\sum f_n$ converge normalement et donc uniformément sur $[a, +\infty[$.

   On a déduit que $\boxed{f \text{ est continue sur tout } [a,+\infty[\text{ où } a > 0, \text{ donc sur } \mathbb{R}_*^+.}$

---

3. On utilise le théorème de la double limite.

   H1 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \delta_{n,0}$.

   H2 D'après la question précédente, $\sum f_n$ converge normalement et donc uniformément sur $[1, +\infty[$, voisinage de $+\infty$.

   On a déduit que $\boxed{f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \sum_{n=0}^{+\infty} \delta_{n,0} = 1.}$

---

4. Avec le changement de variable $u = \sqrt{t}$, on a $\displaystyle\int_0^A e^{-x\sqrt{t}}\,dt = 2\int_0^{\sqrt{A}} u e^{-xu}\,du$.

   On intègre par parties avec $u \mapsto u$ et $u \mapsto -\dfrac{e^{-xu}}{x}$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$. On obtient
   $$\int_0^A e^{-x\sqrt{t}}\,dt = 2\left[-\frac{ue^{-xu}}{x}\right]_0^{\sqrt{A}} + \frac{2}{x}\int_0^{\sqrt{A}} e^{-xu}\,du = -2\frac{\sqrt{A}e^{-x\sqrt{A}}}{x} + 2\left[-\frac{e^{-xu}}{x^2}\right]_0^{\sqrt{A}} = -\frac{2\sqrt{A}e^{-x\sqrt{A}}}{x} - \frac{2e^{-x\sqrt{A}}}{A} + \frac{2}{x^2}$$
   donc $\boxed{\displaystyle\int_0^A e^{-x\sqrt{t}}\,dt \xrightarrow[A \to +\infty]{} \ell(x) = \frac{2}{x^2}.}$

---

5. On procède par comparaison série intégrale. soit $x \in D$. La fonction $g : t \mapsto e^{-x\sqrt{t}}$ est continue et décroissante sur $\mathbb{R}^+$.

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_k^{k+1} g(t)\,dt \leqslant g(n) \leqslant \int_{k-1}^k g(t)\,dt$ donc en sommant pour $n \in [\![0, N]\!]$ où $N \in \mathbb{N}$,
   $$\int_0^{N+1} g(t)\,dt \leqslant \sum_{n=0}^{N} g(n) \leqslant g(0) + \int_1^N g(t)\,dt.$$
   Avec la question précédente, on peut faire tendre N vers $+\infty$ et obtenir $\boxed{\ell(x) \leqslant f(x) \leqslant \ell(x) + 1.}$

---

6. Comme $\ell(x) = \dfrac{2}{x^2}$, $1 = \underset{x \to +\infty}{o}(\ell(x))$ et, par encadrement, $\boxed{f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \ell(x) = \dfrac{2}{x^2}.}$

Exercice 2 : Suites et suites de fonctions - E3A PSI 2010

Partie A

1. (a) $\boxed{a_n \geqslant 0 \text{ et } b_n \geqslant 0}$ s'obtient par récurrence simple sans encombre (à rédiger soigneusement sur la copie avec comme hypothèse de récurrence « a_n et b_n existent et sont positifs. »

   (b) $\boxed{a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n}\right)^2}$ s'obtient directement en remplaçant a_{n+1} et b_{n+1} par les formules données dans l'énoncé.

2. La question précédente donne directement que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_{n+1} \leqslant a_{n+1}$.

   Soit $n \geqslant 1$. On a alors $0 \leqslant b_n \leqslant a_n$ et donc $a_{n+1} \leqslant \frac{2a_n}{2} = a_n$ et $b_{n+1} \geqslant \sqrt{b_n^2} = b_n$ car tout est positif.

   Finalement, $\boxed{0 \leqslant b_n \leqslant b_{n+1} \leqslant a_{n+1} \leqslant a_n.}$

3. Soit $n \geqslant 1$. Vu la question précédente, $a_n b_n \geqslant b_n^2$ donc $b_n \leqslant \sqrt{a_n b_n}$ puis $a_n - 2\sqrt{a_n b_n} + b_n \leqslant a_n - b_n$ et enfin $\boxed{\left(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n}\right)^2 \leqslant a_n - b_n.}$ Avec la question 1.b, on a alors pour tout $n \geqslant 1$, $a_{n+1} - b_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}(a_n - b_n)$.

   En itérant, on obtient pour tout $n \geqslant 1$, $a_n - b_n \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}(a_1 - b_1)$.

   Si, de plus, $1 = b_0 \leqslant a = a_0$, tout ce qui précède reposant sur cette inégalité s'étend au rang $n = 0$ et on peut écrire

$$a_1 - b_1 \leqslant \frac{1}{2}(a_0 - b_0) = \frac{1}{2}(a - 1) = \frac{1}{2}|1 - a|.$$

   Sinon, il suffit d'échanger les rôles de a_0 et b_0 ce qui ne change pas les autres termes des suites, pour obtenir

$$a_1 - b_1 \leqslant \frac{1}{2}(1 - a) = \frac{1}{2}|1 - a|$$

   Finalement, $\boxed{\text{pour tout } n \geqslant 0,\ a_n - b_n \leqslant \frac{1}{2^n}|1 - a|.}$

4. D'après 2, $(a_n)_{n\geqslant 1}$ et $(b_n)_{n\geqslant 1}$ sont respectivement décroissante et croissante. Par la question précédente, $a_n - b_n \to 0$ (on a bien $0 \leqslant a_n - b_n$. Donc $(a_n)_{n\geqslant 1}$ et $(b_n)_{n\geqslant 1}$ sont adjacentes.

   Donc $\boxed{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ sont convergentes vers une même limite.}}$

Partie B

5. La partie nous dit directement que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $(\varphi_n(x))_n$ et $(\psi_n(x))_n$ convergent vers une même limite que l'on peut noter $f(x)$.

   Par définition, $\boxed{\text{les suites } (\varphi_n) \text{ et } (\psi_n) \text{ convergent simplement sur } [0,+\infty[\text{ vers une fonction } f.}$

6. (a) Avec $x = 0$, $\varphi_0(0) = 0$ et on obtient par récurrence que pour tout $n \geqslant 1$, $\psi_n(0) = 0$.
   Or $\psi_n(0) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(0)$ donc par unicité de la limite, $\boxed{f(0) = 0.}$
   Avec $x = 1$, $\varphi_0(1) = \psi_1(1) = 1$ et par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_n(1) = \psi_n(1) = 1$.
   Or $\varphi_n(1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(1)$ donc par unicité de la limite, $\boxed{f(1) = 1.}$

   (b) Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Avec l'étude de la partie A, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sqrt{x} = \psi_1(x) \leqslant \varphi_n(x) \leqslant \varphi_1(x) = \frac{1+x}{2}$. Donc en faisant $n \to +\infty$, $\boxed{\sqrt{x} \leqslant f(x) \leqslant \frac{1+x}{2}.}$

7. Soit A un réel strictement positif. Avec l'étude de la partie A, pour tout $x \in [0,A]$, la monotonie et la limite commune des suites nous dit que pour $n \geqslant 1$, $\psi_n(x) \leqslant f(x) \leqslant \varphi_n(x)$ donc

$$\left|\varphi_n(x) - f(x)\right| \leqslant \psi_n(x) - \varphi_n(x) \leqslant \frac{1}{2^n}|1-x| = \frac{1}{2^n}\max(1-x, x-1) \leqslant \frac{1}{2^n}\max(1, A-1)$$

d'après A.3, majoration uniforme en x. Donc $\varphi_n - f$ est bornée et $\left\|\varphi_n - f\right\|_{\infty,[0,A]} \leqslant \frac{1}{2^n}\max(1, A-1) \to 0$ et $\boxed{(\varphi_n) \text{ converge uniformément vers } f \text{ sur } [0,A].}$

On montre exactement de la même manière que $\boxed{(\psi_n) \text{ converge uniformément vers } f \text{ sur } [0,A].}$

Remarque : Le $n \geqslant 1$ ne change rien sur le mode de convergence.

8.
- On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que les fonctions φ_n et ψ_n sont continues sur $[0,+\infty[$, par opérations usuelles sur les fonctions continues (à rédiger quand même, surtout pour E3A !).
- La suite de fonctions (φ_n) (par exemple) converge uniformément vers f sur tout segment de la forme $[0,A]$ de $\mathbb{R}^+$ donc au voisinage de tout point de $\mathbb{R}^+$.

Par théorème de transfert de continuité, $\boxed{f \text{ est donc continue sur } \mathbb{R}^+.}$

PROBLÈME (algèbre linéaire)

1. Supposons que $\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3 = 0$
En évaluant en x_i, on obtient $\lambda_i A_i(x_i) = 0$ et, comme $A_i(x_i) \neq 0$, on a $\forall i,\ \lambda_i = 0$, ce qui montre que $\boxed{\text{la famille } (A_1, A_2, A_3) \text{ est libre.}}$

2. Un calcul élémentaire donne

$$\boxed{\begin{array}{lll} Q_1(1)=1 & Q_1(3)=0 & Q_1(5)=0 \\ Q_2(1)=0 & Q_2(3)=1 & Q_2(5)=0 \\ Q_3(1)=0 & Q_3(3)=0 & Q_3(5)=1 \end{array}}$$

3. Les résultats obtenus au 1. s'appliquent : la famille (Q_1, Q_2, Q_3) est libre.
Puisque cette famille libre comporte 3 vecteurs de $\mathbb{R}_2[X]$ et que $\mathbb{R}_2[X]$ est de dimension 3, la famille $\boxed{(Q_1, Q_2, Q_3) \text{ est une base de } \mathbb{R}_2[X].}$

4. Un calcul simple donne

$$\begin{cases} Q_1 = \frac{15}{8} - X + \frac{X^2}{8} \\ Q_2 = -\frac{5}{4} + \frac{3X}{2} - \frac{X^2}{4} \\ Q_3 = \frac{3}{8} - \frac{X}{2} + \frac{X^2}{8} \end{cases}$$

D'où la matrice $\boxed{M = \begin{pmatrix} \frac{15}{8} & -\frac{5}{4} & \frac{3}{8} \\ -1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{8} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}.}$

5. $\boxed{\text{Cette matrice est inversible}}$, comme matrice de passage d'une base à une autre base.
En décomposant dans la base (Q_1, Q_2, Q_3), on peut écrire, pour $k \in \{0,1,2\}$,

$$X^k = a_{1,k}Q_1 + a_{2,k}Q_2 + a_{3,k}Q_3$$

En évaluant en $1, 3, 5$, on obtient $a_{1,k} = 1$, $a_{2,k} = 3^k$ et $a_{3,k} = 5^k$.

D'où $\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 5 & 25 \end{pmatrix}.}$

Remarque : pas étonnant de retrouver Vandermonde dans un problème d'interpolation de Lagrange.

6. Comme $Q_0 \neq 0$, la division euclidienne par Q_0 est possible et $P = Q_0 Q + \hat{P}$ avec $\deg \hat{P} < 3$.
Pour tout couple (P_1, P_2) de polynômes et pour tout réel λ, on a
$$\begin{cases} P_1 = Q_0 Q_1 + \hat{P}_1 & \text{avec } \deg P_1 < 3 \\ P_2 = Q_0 Q_2 + \hat{P}_2 & \text{avec } \deg P_2 < 3 \end{cases}$$
D'où
$$P_1 + \lambda P_2 = Q_0 (Q_1 + \lambda Q_2) + \left[\hat{P}_1 + \lambda \hat{P}_2\right].$$
Or
$$\deg\left(\hat{P}_1 + \lambda \hat{P}_2\right) \leqslant \max\left(\deg \hat{P}_1, \deg \hat{P}_2\right) < 3,$$
ce qui montre que le reste de la division euclidienne de $P_1 + \lambda P_2$ par Q_0 est $\hat{P}_1 + \lambda \hat{P}_2$.
Donc $u(P_1 + \lambda P_2) = u(P_1) + \lambda u(P_2)$, ce qui prouve que $\boxed{\text{l'application } u \text{ est linéaire.}}$

7. On a déjà $\operatorname{Im} u \subset \mathbb{R}_2[X]$.
De plus, si P est un polynôme de T, alors $u(P) = P$ car $P = Q_0 \cdot 0 + P$ avec $\deg(P) < 3$, ce qui prouve que $\mathbb{R}_2[X] \subset \operatorname{Im} u$.
Finalement, $\boxed{\operatorname{Im} u = \mathbb{R}_2[X].}$

8. $P \in \operatorname{Ker} u \iff u(P) = 0$, ce qui signifie que $P = Q_0 Q$ où Q est un polynôme quelconque.
Ainsi $\boxed{\operatorname{Ker} u = \{Q_0 Q,\ Q \in \mathbb{R}[X]\} = Q_0 \mathbb{R}[X].}$

9. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Comme $\deg \hat{P} < 3$, $u(\hat{P}) = \hat{P}$, soit $u(u(P)) = P$.
On a donc $u^2 = u$, ce qui montre que f est un projecteur.
$\boxed{\text{L'application } u \text{ est donc la projection sur } \operatorname{Im} u = \mathbb{R}_2[X] \text{ parallèlement à } \operatorname{Ker} u = Q_0 \mathbb{R}[X].}$

10. Puisque $\hat{P} \in \mathbb{R}_2[X]$, $\hat{P}$ se décompose de manière unique sur la base $\mathscr{C}$ de $\mathbb{R}_2[X]$.
Donc $\hat{P} = \lambda_1 Q_1 + \lambda_2 Q_2 + \lambda_3 Q_3$.
On en déduit $\hat{P}(1) = \lambda_1 P_1(1) = \lambda_1$ car $P_2(1) = 0$ et $P_3(1) = 0$; $\hat{P}(3) = \lambda_2 P_2(3) = \lambda_2$ et $\hat{P}(5) = \lambda_3 P_3(5) = \lambda_3$.
En outre $P = Q_0 Q + \hat{P}$.
Comme $Q_0(1) = Q_0(3) = Q_0(5) = 0$, on a $P(1) = \hat{P}(1), P(3) = \hat{P}(3), P(5) = \hat{P}(5)$.
Donc $\boxed{\hat{P} = P(1) Q_1 + P(3) Q_2 + P(5) Q_3.}$

11. Puisque M est la matrice de passage de la base canonique $\mathscr{B}_c$ à la base $\mathscr{C}$, M^{-1} est la matrice de passage de $\mathscr{C}$ à $\mathscr{B}_c$.
On retrouve avec la question précédente
$$\begin{cases} 1 = Q_1 + Q_2 + Q_3 \\ X = Q_1 + 3Q_2 + 5Q_3 \\ X^2 = Q_1 + 9Q_2 + 25Q_3 \end{cases}$$
On retrouve $\boxed{M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 5 & 25 \end{pmatrix}.}$

12. Un calcul simple prouve que $(N - 5I)(N - 3I)(N - I) = 0$. Comme ce sont des polynômes en N, les trois facteurs commutent mutuellement. $\boxed{\text{Les différents produits sont donc tous nuls.}}$

13. Par définition, $\boxed{F \text{ est le sous espace vectoriel engendré par } \left(I, N, N^2\right).}$

14. Remarquons qu'on a $N^2 = \begin{pmatrix} 13 & 12 & 0 \\ 12 & 13 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

La relation $xI + yN + zN^2 = 0$ donne

$$\begin{cases} x + 3y + 13z = 0 \\ \quad 2y + 12z = 0 \\ \quad x + 3y + 9z = 0 \end{cases}$$

En retranchant la première équation à la dernière, il vient $z = 0$, puis $y = 0$ et enfin $z = 0$.
La famille (I, N, N^2) est donc libre.
Puisqu'elle est génératrice de F, c'est donc une base de F.
Par suite, $\boxed{F \text{ est un espace vectoriel de dimension 3.}}$

15. Pour réel λ et pour tout couple de polynômes de $\mathbb{R}_2[X]$

$$\begin{cases} P_1 = a_1 + b_1 X + c_1 X^2 \\ P_2 = a_2 + b_2 X + c_2 X^2 \end{cases}$$

on a

$$P_1 + \lambda P_2 = (a_1 + \lambda a_2) + (b_1 + \lambda b_2) X + (c_1 + \lambda c_2) X^2$$

D'où

$$\begin{aligned} \Psi(P_1 + \lambda P_2) &= (a_1 + \lambda a_2) I + (b_1 + \lambda b_2) N + (c_1 + \lambda c_2) N^2 \\ &= \left(a_1 I + b_1 N + c_1 N^2\right) + \lambda \left(a_2 I + b_2 N + c_2 N^2\right) \end{aligned}$$

donc $\Psi(P_1 + \lambda P_2) = \Psi(P_1) + \lambda \Psi(P_2)$, ce qui montre que Ψ est linéaire.
Puisque Ψ transforme la base $(1, X, X^2)$ en la base (I, N, N^2), $\boxed{\Psi \text{ est un isomorphisme de } \mathbb{R}_2[X] \text{ sur } F.}$

16. On a vu question 11 que

$$\begin{cases} 1 &= Q_1 + Q_2 + Q_3 \\ X &= Q_1 + 3Q_2 + 5Q_3 \\ X^2 &= Q_1 + 9Q_2 + 25Q_3 \end{cases}$$

Comme Ψ est un isomorphisme,

$$\begin{cases} \Psi(1) &= \Psi(Q_1) + \Psi(Q_2) + \Psi(Q_3) \\ \Psi(X) &= \Psi(Q_1) + 3\Psi(Q_2) + 5\Psi(Q_3) \\ \Psi(X^2) &= \Psi(Q_1) + 9\Psi(Q_2) + 25\Psi(Q_3) \end{cases}$$

D'où

$$\boxed{\begin{cases} I &= C_1 + C_2 + C_3 \\ N &= C_1 + 3C_2 + 5C_3 \\ N^2 &= C_1 + 9C_2 + 25C_3 \end{cases}}$$

17. Par définition des C_i, on a :

$$\begin{cases} C_1 = Q_1(N) = \dfrac{1}{8}(N - 3I)(N - 5I) \\ C_2 = Q_2(N) = -\dfrac{1}{4}(N - I)(N - 5I) \\ C_3 = Q_3(N) = \dfrac{1}{8}(N - I)(N - 3I) \end{cases}$$

Comme dans le produit $(N - I)(N - 3I)(N - 5I)$, on peut permuter les facteurs, on a

$$C_1 C_2 = -\frac{1}{32}(N - I)(N - 3I)(N - 5I)(N - 5I) = 0(N - 5I) = 0$$

De même, on a immédiatement $\boxed{C_i C_j = 0 \text{ si } i \neq j.}$