

CCP MP Maths 2 2019

Exercice I

q1 En respectant l'énoncé, avec un algorithme très peu optimisé donc :

```
def estPremier(n):
    if n<=1:
        return False
    if n==2:
        return True
    p=2
    r=np.sqrt(n) # sale: ce n'est pas un entier...
    while p<=r:
        if n % p == 0:
            return False
        p+=1
    return True
```

q2 Toujours sans optimiser :

```
def listePremiers(n):
    li=[]
    p=2
    for p in range(n):
        if estPremier(p):
            li.append(p)
        p+=1
    return li
```

q3 Il faut un compteur.

```
def valuation_p_adique(n,p):
    valuation = 0
    nAlias = n
    while nAlias % p>0:
        valuation +=1
        nAlias = nAlias/p
    return valuation
```

q4 C'est toujours plus concis en récursif.

```
def val(n,p):
    if n % p != 0:
        return 0
    return val(n/p, p)+1
```

q5

```
def decomp_fact_premiers(n):
    if n==1:
        return []
```

```

li_fact = listePremiers(n)
resu = []
for p in li_fact:
    if n % p == 0:
        resu.append([p, val(n,p)])
return resu

```

donne bien à l'exécution

```

print(decomp_fact_premiers(40))
[[2, 3], [5, 1]]

```

Exercice II

91 Non, on peut penser par exemple dans un plan à une rotation d'angle $\pi/2$.

Remarque : plus généralement il s'agit des endomorphismes antisymétriques, bien évidemment hors-programme.

92 La notion d'adjoint donnée ici était au programme il y a quelques années mais n'y est plus. On peut néanmoins procéder sans rien en savoir d'autre que la définition :

Supposons (i) et prouvons (ii) : Pour tout couple de vecteurs $(x, y) \in E^2$, on a par définition de v et symétrie du produit scalaire

$$\langle u(x) | u(x) \rangle = \langle x | v \circ u(x) \rangle = \langle v \circ u(x) | x \rangle$$

et comme $\langle v(x) | v(x) \rangle = \langle u \circ v(x) | x \rangle$ on a bien (i) \Rightarrow (ii).

Supposons (ii) et prouvons (iii) : Il suffit de prendre $x = y$.

Supposons (iii) et prouvons (ii) : en mettant au carré il vient

$$\langle u(x) | u(x) \rangle = \langle v(x) | v(x) \rangle \quad \forall x \in E$$

On a besoin de deux vecteurs distincts, écrivons donc $x = y + z$ où y, z sont totalement quelconques. Par linéarité de u et bilinéarité et symétrie du produit scalaire, il vient

$$\langle u(x) | u(x) \rangle = \langle u(y + z) | u(y + z) \rangle = \langle u(y) | u(y) \rangle + \langle u(z) | u(z) \rangle + 2\langle u(y) | u(z) \rangle$$

et similairement pour $\langle v(x) | v(x) \rangle$. Or on suppose (iii) et donc $\langle u(y) | u(y) \rangle = \langle v(y) | v(y) \rangle$ et de même pour z . En égalant $\langle u(x) | u(x) \rangle$ et $\langle v(x) | v(x) \rangle$ il reste donc seulement $2\langle u(y) | u(z) \rangle = 2\langle v(y) | v(z) \rangle$, c'est à dire (ii).

Supposons (ii) et prouvons (i) : par un calcul déjà fait on a

$$\langle x | v \circ u(y) \rangle = \langle x | u \circ v(y) \rangle \quad \text{d'où par différence et linéarité} \quad \langle x | (v \circ u - u \circ v)(y) \rangle = 0.$$

Le vecteur $(v \circ u - u \circ v)(y)$ est donc orthogonal à tout x de E , c'est forcément le vecteur nul ; Comme c'est vrai pour tout y c'est que l'endomorphisme $v \circ u - u \circ v \in \mathcal{L}(E)$ est nul (c'est l'application nulle).

Problème

Partie I

98 Trace, rang, déterminant et polynôme caractéristique sont invariants par changement de base et donc identiques pour deux matrices semblables (notons que trace et Det sont des coefficients du polynôme caractéristique).

99 Les matrices ayant triangulaires, on a tout de suite leurs valeurs propres (pour gagner du temps) 1, 2 et 2, d'où le déterminant (4), le rang (3 puisque $\text{Det} \neq 0$), la trace ($1+2+2=5$) et le polynôme caractéristique : $(X-1)(X-2)(X-2)$.

Je préfère répondre à la dernière question avant l'antépénultième : on constate que A est victime d'un polynôme annulateur scindé à racines simples, à savoir $(X-1)(X-2)$. En effet,

$$(A - I)(A - 2I) = A^2 - 3A + 2I = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$$

Donc A est diagonalisable par le théorème du cours. En revanche B ne l'est pas, car son espace propre $E_2(B)$ est réduit à une droite (comme $E_1(B)$) et donc la somme des espaces propres de B n'est pas E entier. En effet, la résolution du système

$$BX = 2X \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{livre} \quad \text{Vect} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que B ne saurait avoir le même polynôme minimal, qui l'obligerait à être diagonalisable. Une autre démonstration consiste à observer que le minimal de B est spot égal à son caractéristique, soit à son seul diviseur strict ayant les mêmes racines i.e. $(X-1)(X-2)$ et à tester si ce dernier est annulateur (il ne l'est pas).

910

La première méthode consiste à définir u (associé à A) et v (associé à B) par les images de la base canonique :

$$\begin{cases} u(e_1) = e_2 + 2e_3 \\ u(e_2) = e_1 + e_3 \\ u(e_3) = e_1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v(e_1) = e_2 + e_3 \\ v(e_2) = e_1 + 2e_3 \\ v(e_3) = e_2 \end{cases} \iff \begin{cases} v(e'_2) = e'_1 + e'_3 \\ v(e'_1) = e'_2 + 2e'_3 \\ v(e'_3) = e'_1 \end{cases}$$

en posant $e_2 = e'_1, e_1 = e'_2, e_3 = e'_3$: ce changement de base donne donc la même matrice, i.e. A et B sont semblables.

La deuxième méthode consiste à calculer le polynôme caractéristique (commun) des deux matrices, à savoir $X^3 - 3X - 1$ (la règle de Sarrus marche bien, mais toute autre méthode est utilisable).

Un étude sommaire de la fonction $x \mapsto x^3 - 3x - 1$ montre que sa dérivée change de signe en -1 et en 1, ce qui donne le graphe suivant :

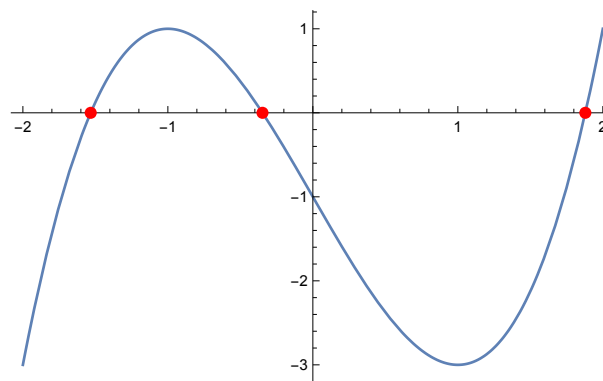


FIGURE 1 – Graphe du polynôme caractéristique

Comme la fonction est négative (resp. positive) en $-\infty$ (resp. $+\infty$), positive en -1 et négative en +1, elle a par continuité trois racines (au moins!), et pas plus vu le degré.

On a trois racines distinctes du polynôme caractéristique, donc par la condition suffisante de diagonalisabilité, A (comme B) est diagonalisable.

- Q11** Par le théorème du rang, le noyau est de dimension $n - 1$. Par le théorème de la base incomplète, il existe une base de E commençant par $n - 1$ vecteurs du noyau. Dans cette base la matrice a la forme voulue, puisque les $n - 1$ premières colonnes sont nulles.
- Q12** Appliquons la question précédente : u admet une matrice de la forme donnée. On calcule $U^2 = a_n U$. L'hypothèse $u \circ u \neq 0$ impose $a_n \neq 0$. Réciproquement cette condition suffit (car le dernier terme en bas à droite de U^2 est a_n^2). On a alors un polynôme annulateur à deux racines **distinctes** 0 et a_n , ce qui prouve la diagonalisabilité.
- Q13** Par exemple la matrice suivante est symétrique et nilpotente (et non identiquement nulle !) ce qui exclut sa diagonalisabilité : $S = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}$.
- Q14** Les première et troisième colonnes sont identiques, donc le rang n'est pas maximal. De même la deuxième et la quatrième, donc le rang est au plus 2.
Or la première et la deuxième colonne sont indépendantes : sinon on aurait une constante λ telle que l'une soit égale à $\lambda \times$ l'autre ce qui donnerait

$$\alpha = \lambda\beta \quad \beta = \lambda\alpha$$

ce qui est impossible car vu que $\alpha\beta \neq 0$ on aurait $\lambda^2 = 1$ d'où α, β égaux ou opposés ce qui est supposé ne pas être. Donc **le rang est 2**.

Par ailleurs, en raisonnant sur ces colonnes on s'aperçoit (avec de bonnes lunettes. . .) qu'en notant $(e_1 \dots e_4)$ la base canonique et u l'endomorphisme associé, on a

$$\begin{cases} u(e_1 + e_2 + e_3 + e_4) = 2(\alpha + \beta)(e_1 + e_2 + e_3 + e_4) \\ u(e_1 - e_2 + e_3 - e_4) = 2(\alpha - \beta)(e_1 - e_2 + e_3 - e_4) \end{cases}$$

ce qui donne deux valeurs propres (distinctes parce que $\beta \neq 0$) et des vecteurs propres associés.

En cherchant une base du noyau (non trivial vu le rang calculé), on trouve aussi $e_1 - e_3$ et $e_2 - e_4$. Ces quatre vecteurs forment bien une base, concaténée de bases des trois espaces propres.

NB : on pourrait maintenant en déduire le polynôme caractéristique. . .

- Q15** Considérons la base $(e'_1 = \alpha e_1, e'_2 = e_2)$ [base car $\alpha \neq 0$] et soit u l'endomorphisme associé à A dans la base canonique (e_1, e_2) . Le changement de base ramène à la forme standard $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, car $u(e'_2) = u(e_2) = \lambda e'_2 + e'_1$. On peut faire de même pour B , donc ces deux matrices sont semblables à une troisième et sont semblables.

Partie II

- Q16** On a $PB = AP \iff (R + iS)B = A(R + iS) \iff RB + iSB = AR + iAS$ et on conclut en égalant les parties réelles et imaginaires (il est bien clair que deux matrices complexes sont égales \iff leurs parties réelles et imaginaires le sont).
- Q17** Un déterminant est une somme de produits de termes de la matrice, donc ici de polynômes en x : c'est bien un polynôme en x . La **fonction** polynômiale $x \mapsto \text{Det}(R + xS)$ a une valeur non nulle quand $x = i$ par hypothèse (on trouve $\text{Det} P$), donc le **polynôme** n'est pas nul en tant qu'élément de $\mathbb{R}[X]$. En conséquence il n'a qu'un nombre fini de racines (réelles, complexes, au choix) et en particulier il existe une valeur **réelle** de x pour laquelle la fonction de vaut pas 0, i.e. $Q = R + xS$ est alors inversible.
- Q18** Mais alors. . . nous avons trouvé une matrice Q inversible et réelle telle que $QB = AQ$ (en appliquant **Q16, Q17**) ! On peut en déduire (triomphalement) que $B = Q^{-1}AQ$ avec $Q \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$, cqfd.
- Q19** Les deux matrices ont le même polynôme caractéristique $X^3 + X$ de racines $0, i, -i$: elles sont donc diagonalisables et semblables dans \mathbb{C} à la matrice $\text{Diag}(0, i, -i)$ et donc semblables dans \mathbb{C} . Étant réelles, elles sont semblables aussi dans \mathbb{R} , d'après le résultat juste démontré.

Partie III

Ces dernières questions, de synthèse, demandent du recul.

Q20 Le polynôme caractéristique est de degré 2.

- Si ses deux racines sont distinctes, alors les deux matrices sont diagonalisables dans \mathbb{C} , donc semblables à une même matrice diagonale (complexe ou purement réelle), donc semblables dans \mathbb{R} , d'après **Q18**.
- Si ses deux racines sont confondues, alors elles sont réelles mais on a besoin de l'égalité des polynômes minimaux. Comme on a le polynôme caractéristique égal à $(X - \lambda)^2, \lambda \in \mathbb{R}$, le polynôme minimal ne peut prendre que deux valeurs d'après le théorème de Cayley Hamilton : $\mu_A = X - \lambda$ ou $(X - \lambda)^2$.

1. Dans le premier cas, A (et B) sont des homothéties λI et c'est fini.

2. Dans le deuxième cas, A (comme B) ne peut être diagonalisable car, sa valeur propre unique étant λ , elle serait alors semblable à λI qui a un polynôme minimal de degré 1 ! Elle est néanmoins trigonalisable (son polynôme caractéristique étant scindé), et donc semblable à la matrice A de la question **Q15**. De même pour B (avec des constantes a, b *a priori* distinctes mais non nulles). D'après cette même question, ces matrices sont bien semblables et la discussion est complète.

Q21 On est sans doute supposés s'inspirer de **Q14**. Je propose plus simplement encore ce contre-exemple

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En effet, ces matrices ne peuvent être semblables puisque leurs rangs sont 1 et 2 respectivement ; néanmoins, elles sont toutes deux nilpotentes d'indice 2 ($A^2 = B^2 = 0$, sans que ni A ni B ne soient nulles) ce qui signifie que leur polynôme minimal est X^2 , le polynôme caractéristique étant X^4 . Simple à vérifier mais pas à trouver quand on n'a jamais vu la réduction de Jordan.