10

Savoir-faire et thèmes classiques – Intégration sur un segment – MP2I

Savoir-faire

- ☐ Majorer la norme d'une intégrale sur un segment
- ☐ Utiliser la positivité améliorée
- ☐ Utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour les intégrales et son cas d'égalité
- ☐ Reconnaître des sommes de Riemann et traduire leur convergence
- ☐ Utiliser le théorème fondamental de l'analyse
- ☐ Étudier une fonction intégrale dépendant de ses bornes en introduisant une primitive
- ☐ Effectuer une intégration par parties et un changement de variables
- ☐ Calculer une primitive directement, par IPP, par CV, par DES d'une fraction rationnelle, en utilisant les règles de Bioche, en les appliquant aux fonctions hyperboliques, en trouvant un bon CV lorsqu'il y a des racines
- ☐ Énoncer précisément les trois formules de Taylor avec leurs hypothèses

Thèmes Classiques

- ☐ Étude complète des intégrales de Wallis
- ☐ Lemme de Riemann-Lebesgue

11

Savoir-faire et thèmes classiques – Suites et séries de fonctions

Savoir-faire

- ☐ Définir et étudier les différents modes de convergence et les comparer : simple et uniforme pour les suites de fonctions, simple, uniforme, normale pour les séries de fonctions
- ☐ Traduire l'absence de convergence uniforme ou normale
- ☐ Utiliser le TSSA pour traduire une convergence uniforme
- ☐ Montrer une convergence normale par majoration ou par étude de fonction
- ☐ Étudier la continuité, les limites, la classe $\mathscr{C}^k$ d'une suite ou d'une série de fonctions
- ☐ Obtenir un équivalent de série de fonction par comparaison série-intégrale ou en sortant quelques termes de la somme de la série
- ☐ Intervertir limite et intégrale ou effectuer une intégration terme à terme (interversion série-intégrale) sur un segment en cas de convergence uniforme
- ☐ Utiliser des approximations uniformes (théorème de Weierstraß, fonctions en escalier), les traduire séquentiellement ou avec des ε

Thèmes Classiques

- ☐ Étude complète des fonctions ζ de Riemann et η de Dirichlet
- ☐ Théorème de Weierstrß par les polynômes de Bernstein (voir aussi probabilités)
- ☐ L'orthogonal de l'ensemble des fonctions polynomiales sur un segment $[a,b]$ pour le produit scalaire canonique sur $\mathscr{C}([a,b])$ est réduit à la fonction nulle

12

Savoir-faire et thèmes classiques – Intégrales généralisées

Savoir-faire

- ☐ Étudier l'intégrabilité d'une fonction en commençant par la continuité (par morceaux) et en découpant l'intervalle d'intégration si nécessaire
- ☐ Comparer aux intégrales de Riemann avec le critère de convergence en $\pm\infty$, en 0, en $a \in \mathbb{R}$
- ☐ Comparer aux intégrales exponentielles
- ☐ Manipuler une intégrale généralisée de fonction positive dans $[0, +\infty]$
- ☐ Distinguer l'intégrabilité de la convergence d'intégrale
- ☐ Dériver une fonction intégrale généralisée dont la variable est l'une des borne en faisant intervenir une primitive
- ☐ Majorer le module d'une intégrale généralisée
- ☐ Effectuer (et justifier) un changement de variable
- ☐ Effectuer une intégration par partie en se ramenant sur un segment
- ☐ Intégrer les relations de comparaisons dans les cas de convergence ou de divergence

Thèmes Classiques

- ☐ Intégrales de Bertrand
- ☐ Étude de l'intégrale semi-convergente de Dirichlet $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \,\mathrm{d}\, t$
- ☐ Calculs des intégrales de Gauß et de Dirichlet