Programme de colle – MPI

1. Intégration sur un segment

Révisions du programme de première année : calculs de primitives, intégrales sur un segment des fonctions numériques. Voir programme page suivante.

L'inégalité de Cauchy-Schwarz est revue à cette occasion, pour être utilisée avec les intégrales.

2. Régularité des suites et séries de fonctions

Reprise du début du chapitre auquel on ajoute l'intégration sur un segment et la classe $\mathscr{C}^k$.

Extrait du programme officiel :

Contenus	Capacités & commentaires
c) Intégration d'une limite uniforme sur un segment	
Soit (u_n) une suite de fonctions continues définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans F, a un point de I. On suppose que (u_n) converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction u. Pour $n\in\mathbb{N}$ et $x\in I$ soit $$U_n(x)=\int_a^x u_n,\quad U(x)=\int_a^x u.$$ Alors (U_n) converge uniformément vers U sur tout segment de I.	En particulier, si (u_n) converge uniformément vers u sur le segment $[a,b]$, alors : $\int_a^b u_n \to \int_a^b u$.
d) Dérivation d'une suite de fonctions	
Soit (u_n) une suite de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans F. Si (u_n) converge simplement sur I vers une fonction u, et si (u'_n) converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction v, alors (u_n) converge uniformément vers u sur tout segment de I, u est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et $u'=v$.	En pratique, on vérifie la convergence uniforme de (u'_n) sur des intervalles adaptés à la situation.
Extension aux suites de fonctions de classe $\mathscr{C}^k$, sous l'hypothèse de convergence simple de $(u_n^{(j)})$ pour $0\leqslant j\leqslant k-1$ et de convergence uniforme sur tout segment de $(u_n^{(k)})$.	En pratique, on vérifie la convergence uniforme de $(u_n^{(k)})$ sur des intervalles adaptés à la situation.
e) Séries de fonctions	
Adaptation des résultats des paragraphes précédents au cas des séries de fonctions. Exemples d'études de fonctions définies comme sommes de séries : régularité, étude asymptotique, utilisation de la comparaison série-intégrale.	

3. Intégrales généralisées

Extrait du programme officiel :

Les fonctions sont à valeurs dans $\mathbb{K}$, corps des nombres réels ou des nombres complexes.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Intégrales généralisées sur un intervalle de la forme $[a,+\infty[$	
Pour f continue par morceaux de $[a,+\infty[$ dans $\mathbb{K}$, l'intégrale $\int_a^{+\infty} f$ est dite convergente si la fonction $x\mapsto\int_a^x f$ a une limite finie en $+\infty$.	Notations $\int_a^{+\infty} f$, $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$. Intégrale convergente en $+\infty$. Dérivation de $x\mapsto\int_x^{+\infty} f$ si f est continue.
Si f est continue par morceaux sur $[a,+\infty[$ et à valeurs positives, l'intégrale $\int_a^{+\infty} f$ converge si et seulement si $x\mapsto\int_a^x f$ est majorée.	Écriture $\int_a^{+\infty} f=+\infty$ en cas de divergence.
Si f et g sont deux fonctions continues par morceaux sur $[a,+\infty[$ telles que $0\leqslant f\leqslant g$, la convergence de $\int_a^{+\infty} g$ implique celle de $\int_a^{+\infty} f$.	
Pour $\alpha\in\mathbb{R}$, nature de l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$.	
Pour $a\in\mathbb{R}$, nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-at}\,\mathrm{d}t$.	
b) Intégrabilité sur un intervalle de la forme $[a,+\infty[$	
Une fonction f est dite intégrable sur $[a,+\infty[$ si elle est continue par morceaux sur $[a,+\infty[$ et si $\int_a^{+\infty}\lvert f\rvert$ converge.	On utilise indifféremment les expressions « f est intégrable sur $[a,+\infty[$ » et « l'intégrale $\int_a^{+\infty} f$ converge absolument ». Pour f de signe constant, $\int_a^{+\infty} f$ converge si et seulement si f est intégrable sur $[a,+\infty[$. Un calcul montrant que $\int_I \lvert f\rvert<+\infty$ vaut preuve d'intégrabilité.
Si f est intégrable sur $[a,+\infty[$, alors $\int_a^{+\infty} f$ converge.	Fonction intégrable en $+\infty$. L'étude des intégrales semi-convergentes n'est pas un objectif du programme.
Théorème de comparaison : pour f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a,+\infty[$, à valeurs dans $\mathbb{K}$: ★ si $f(x)\underset{x\to+\infty}{=}O\big(g(x)\big)$, alors l'intégrabilité de g sur $[a,+\infty[$ implique celle de f ; ★ si $f(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}g(x)$, alors l'intégrabilité de g sur $[a,+\infty[$ équivaut à celle de f.	Le résultat s'applique en particulier si $f(x)\underset{x\to+\infty}{=}o(g(x))$.
c) Intégrales généralisées sur un intervalle quelconque	
Intégrale généralisée d'une fonction continue par morceaux sur un intervalle semi-ouvert ou ouvert de $\mathbb{R}$.	Notations $\int_a^b f$, $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$. Intégrale convergente en b, en a. Écriture $\int_a^b f=+\infty$ si f est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et d'intégrale divergente. Pour une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, un calcul aboutissant à un résultat fini vaut preuve de convergence.
Propriétés des intégrales généralisées : linéarité, positivité, croissance, relation de Chasles. Intégration par parties sur un intervalle quelconque : $$\int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t=[fg]_a^b-\int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$	L'existence des limites du produit fg aux bornes de l'intervalle assure que les intégrales de fg' et de $f'g$ sont de même nature. Pour les applications pratiques, on ne demande pas de rappeler les hypothèses de régularité.
Changement de variable : étant données une fonction f continue sur $]a,b[$ et une fonction $\varphi :]\alpha,\beta[\to]a,b[$ bijective, strictement croissante et de classe $\mathscr{C}^1$, les intégrales $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_\alpha^\beta f\big(\varphi(u)\big)\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$ sont de même nature et égales en cas de convergence.	Adaptation au cas où φ est strictement décroissante. On applique ce résultat sans justification dans des cas de changements de variable usuels.
d) Intégrales absolument convergentes et fonctions intégrables	
Intégrale absolument convergente. La convergence absolue implique la convergence. Une fonction est dite intégrable sur l'intervalle I si elle y est continue par morceaux et si son intégrale sur I est absolument convergente.	On utilise indifféremment les expressions « f est intégrable sur $[a,b[$ » et « l'intégrale $\int_a^b f$ converge absolument ». Fonction intégrable en b, en a.

Contenus	Capacités & Commentaires
Espace $L^1(I,\mathbb{K})$ des fonctions intégrables de I dans $\mathbb{K}$.	Pour f intégrable de I dans $\mathbb{K}$, notation $\int_I f$.
Inégalité triangulaire. Si f est continue et intégrable sur I, à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et si $\int_I f = 0$, alors f est identiquement nulle. Adaptation du théorème de comparaison en une borne quelconque.	
Si $\alpha \in \mathbb{R}$, nature de l'intégrale de Riemann $\int_a^b \frac{1}{\lvert x-a\rvert^\alpha}\,\mathrm{d}x$.	La fonction f est intégrable en a (resp. b) si et seulement si $t \mapsto f(a+t)$ (resp. $t \mapsto f(b-t)$) est intégrable en 0.
e) Intégration des relations de comparaison	
Intégration des relations de comparaison, pour les intégrales partielles ou les restes : domination, négligeabilité, équivalence.	La fonction de référence est réelle de signe constant.

Pour les intégrations par parties sur des intervalles quelconques : on revient systématiquement sur un segment. Pas de convergence dominée au programme cette semaine.

Semaine prochaine : Intégrales à paramètres, convergence dominée.

4. Questions de cours

Les preuves marquées d'un astérisque * ne peuvent être posées qu'aux membres des trinômes 5 à 7 sauf Caroline.

(i) Intégrales de Wallis $\int_0^{\pi/2} \sin^n t\,\mathrm{d}t$: relation de récurrence, expression, équivalent.

(ii) * Convergence des sommes de Riemann dans le cas où la fonction est continue sur le segment $[a,b]$, avec une subdivision quelconque. Cas d'une fonction continue ou continue par morceau au choix de l'étudiant.

(iii) Un calcul de primitive de la forme $\dfrac{ax+b}{ax^2+\beta x+\gamma}$ avec $\beta^2 < 4\alpha\gamma$ au choix du colleur.

(iv) Énoncés précis choisis par le colleur parmi les théorèmes d'intégration sur un segment, primitive, classe $\mathscr{C}^k$ (avec k éventuellement infini) d'une suite de fonction ou d'une série de fonctions et les trois formules de Taylor (avec leurs hypothèses, bien sûr).

(v) Fonction ζ de Riemann : classe $\mathscr{C}^\infty$, expression des dérivées, variations, convexité, limite aux bornes et graphe.

(vi) Exemple de fonction intégrable au voisinage de $+\infty$, ne tendant pas vers 0, voire non bornée (on se contente d'une description graphique très précise).

(vii) * Si f est intégrable sur $[a,+\infty[$, alors $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge (cas réel ou complexe).

(viii) * Étude de l'intégrale semi-convergente $\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ (convergence et non intégrabilité).

(ix) * Intégrales de Bertrand sur $[2,+\infty[$.

(x) **Exercices CCINP 10, 14, 16, 28, 76, 79**

5. Exercices CCINP

- **CCINP 10** : On pose $f_n(x) = (x^2+1)\dfrac{ne^x + xe^{-x}}{n+x}$.
  1. Démontrer que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[0,1]$.
  2. Calculer la limite lorsque $n \to +\infty$ de $\displaystyle\int_0^1 (x^2+1)\frac{ne^x+xe^{-x}}{n+x}\mathrm{d}x$.

- **CCINP 14** :
  1. Soit a et b deux réels donnés avec $a < b$.
     Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur $[a,b]$, à valeurs réelles.
     Démontrer que si la suite (f_n) converge uniformément sur $[a,b]$ vers f, alors la suite $\left(\displaystyle\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.
  2. Justifier comment ce résultat peut être utilisé dans le cas des séries de fonctions.
  3. Démontrer que $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n}$.

- **CCINP 16 – ⚠ énoncé modifié pour 2025** : On considère la série de fonctions de terme général u_n définie par :
  $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [0,1],\quad u_n(x) = \ln\left(1+\frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}.$$
  On pose, lorsque la série converge,
  $$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left[\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)-\frac{x}{n}\right].$$
  1. Démontrer que S est définie sur $[0,1]$.
  2. On définit une suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ par $u_n = \ln(n+1) - \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.
     En utilisant $S(1)$ montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente.
     En déduire un équivalent simple de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ lorsque $n \to +\infty$.
  3. Démontrer que S est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$ et calculer $S'(1)$.

- **CCINP 28** : *N.B. : les deux questions sont indépendantes.*
  1. La fonction $x \longmapsto \dfrac{e^{-x}}{\sqrt{x^2-4}}$ est-elle intégrable sur $]2,+\infty[$?
  2. Soit a un réel strictement positif.
     La fonction $x \longmapsto \dfrac{\ln x}{\sqrt{1+x^{2a}}}$ est-elle intégrable sur $]0,+\infty[$?

- **CCINP 76** : Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire noté $(\,|\,)$.
  On pose $\forall x \in E,\ \|x\| = \sqrt{(x|x)}$.
  1. (a) Énoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
     (b) Dans quel cas a-t-on égalité ? Le démontrer.
  2. Soit $E = \left\{f \in \mathscr{C}([a,b],\mathbb{R}),\ \forall x \in [a,b]\ f(x) > 0\right\}$.
     Prouver que l'ensemble $\left\{\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \times \int_a^b \frac{1}{f(t)}\,\mathrm{d}t,\ f \in E\right\}$ admet une borne inférieure m et déterminer la valeur de m.

- **CCINP 79** : Soit a et b deux réels tels que $a<b$.
  1. Soit h une fonction continue et positive de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.
     Démontrer que $\displaystyle\int_a^b h(x)\,\mathrm{d}x = 0 \Longrightarrow h = 0$.
  2. Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.
     On pose : $\forall (f,g) \in E^2,\ (f|g) = \displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$.
     Démontrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.
  3. Majorer $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}e^{-x}\,\mathrm{d}x$ en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

6. Programme de MP2I

Extrait du programme officiel :

Contenus	Capacités & commentaires
Calcul de primitives	
Primitives d'une fonction définie sur un intervalle à valeurs complexes. Lien entre intégrales et primitives.	Description de l'ensemble des primitives d'une fonction sur un intervalle connaissant l'une d'entre elles. On rappelle sans démonstration que, pour une fonction continue f, $x \mapsto \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ a pour dérivée f. On pourra noter $\int^{x} f(t)\mathrm{d}t$ une primitive générique de f.
Calcul des primitives, application au calcul d'intégrales.	Primitives de $x \mapsto \mathrm{e}^{\lambda x}$ pour $\lambda \in \mathbb{C}$, application aux primitives de $x \mapsto \mathrm{e}^{ax}\cos(bx)$ et $x \mapsto \mathrm{e}^{ax}\sin(bx)$.
Primitives des fonctions exponentielle, logarithme, puissances, trigonométriques et hyperboliques, et des fonctions $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$, $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.	Les étudiants doivent savoir calculer les primitives de fonctions du type $x \mapsto \frac{1}{ax^2+bx+c}$ et reconnaître les dérivées de fonctions composées.
Intégration par parties, changement de variable.	Pour les applications pratiques, on ne demande pas de rappeler les hypothèses de régularité.
Fonctions continues par morceaux	
Subdivision d'un segment, pas d'une subdivision. Fonction en escalier, fonction continue par morceaux.	Les fonctions sont définies sur un segment et à valeurs dans $\mathbb{K}$. Structure de sous-espace vectoriel et de sous-anneau de l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur un segment à valeurs dans $\mathbb{K}$.
Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment	
Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment à valeurs dans $\mathbb{K}$.	Le programme n'impose pas de construction particulière. Interprétation géométrique de l'intégrale. Notations $\int_{[a,b]} f$, $\int_a^b f$, $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.
Linéarité, positivité et croissance de l'intégrale. Inégalité triangulaire intégrale : $\left\lvert \int_{[a,b]} f \right\rvert \leqslant \int_{[a,b]} \lvert f \rvert$.	
Relation de Chasles.	Extension de la notation $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ au cas où $b \leqslant a$. Propriétés correspondantes.
Si f est continue, à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et si $\int_{[a,b]} f = 0$, alors $f = 0$. Intégrale d'une fonction paire ou impaire sur un segment centré en 0. Intégrale d'une fonction périodique sur un intervalle de période.	Valeur moyenne d'une fonction continue par morceaux sur un segment.
Sommes de Riemann	
Pour f continue par morceaux sur le segment $[a,b]$, $$\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$	Interprétation géométrique. Démonstration exigible pour f lipschitzienne.
Lien entre intégrale et primitive	
Dérivation de $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ pour f continue. Toute fonction continue sur un intervalle possède des primitives.	
Formules de Taylor globales	
Formule de Taylor avec reste intégral et inégalité de Taylor-Lagrange.	L'égalité de Taylor-Lagrange est hors programme. On souligne la différence de nature entre la formule de Taylor-Young (locale) et les formules de Taylor globales.