Programme de colle – MPI

1. Réduction

Reprise du programme précédent, auquel s'ajoute : *Extrait du programme officiel :*

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Endomorphismes et matrices carrées trigonalisables	
Un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie est dit trigonalisable s'il existe une base de E dans laquelle sa matrice est triangulaire.	Interprétation géométrique.
Une matrice carrée est dite trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire.	Interprétation en termes d'endomorphisme. La pratique de la trigonalisation n'est pas un objectif du programme.
Un endomorphisme est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé.	Traduction matricielle. Expression à l'aide des valeurs propres de la trace et du déterminant d'un endomorphisme trigonalisable, d'une matrice trigonalisable.
Endomorphismes nilpotents, matrices nilpotentes	
Endomorphisme nilpotent d'un espace vectoriel E de dimension finie, matrice nilpotente.	
Un endomorphisme est nilpotent si et seulement s'il est trigonalisable avec pour seule valeur propre 0.	Caractérisation des endomorphismes nilpotents et des matrices nilpotentes par le polynôme caractéristique.
L'indice de nilpotence est majoré par la dimension de E.	

2. Continuité, continuité uniforme, dérivation et convexité des fonctions numériques

Révisions du programme de 1re année. Voir page suivante.

La caractérisation séquentielle de l'uniforme continuité est utile en particulier pour démontrer une absence d'uniforme continuité.

Le théorème de Heine permet en particulier de démontrer le théorème d'approximation uniforme des fonctions continues par morceaux sur un segment par des fonctions en escalier.

La fonction racine carrée est un exemple d'application uniformément continue (car $1/2$-hölderienne) mais non lipschitzienne.

Semaine prochaine : Intégration sur un segment (révisions). Régularité des suites et séries de fonctions.

3. Questions de cours

Les preuves marquées d'un astérisque ✻ *ne peuvent être posées qu'aux membres des trinômes 5 à 7 sauf Caroline.*

(i) ✻ Un endomorphisme est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé.

(ii) Un endomorphisme est nilpotent si et seulement s'il est trigonalisable avec pour seule valeur propre 0. L'indice de nilpotence est majoré par la dimension de E.

(iii) ✻ Théorème d'approximation uniforme des fonctions continues par morceaux sur un segment par des fonctions en escalier.

(iv) ✻ Caractérisation séquentielle de l'uniforme continuité et théorème de Heine.

(v) Inégalité de Jensen.

(vi) **Exercices CCINP 3, 4, 43, 72, 73, 83**

4. Exercices CCINP

CCINP 3

1. On pose $g(x)=e^{2x}$ et $h(x)=\dfrac{1}{1+x}$.
Calculer, pour tout entier naturel k, la dérivée d'ordre k des fonctions g et h sur leurs ensembles de définitions respectifs.
2. On pose $f(x)=\dfrac{e^{2x}}{1+x}$.
En utilisant la formule de Leibniz concernant la dérivée $n^{\text{ième}}$ d'un produit de fonctions, déterminer, pour tout entier naturel n et pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, la valeur de $f^{(n)}(x)$.
3. Démontrer, dans le cas général, la formule de Leibniz, utilisée dans la question précédente.

CCINP 4

1. Énoncer le théorème des accroissements finis.
2. Soit $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ et soit $x_0\in]a,b[$. On suppose que f est continue sur $[a,b]$ et que f est dérivable sur $]a,x_0[$ et sur $]x_0,b[$.
Démontrer que, si f' admet une limite finie en x_0, alors f est dérivable en x_0 et $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)$.
3. Prouver que l'implication : (f est dérivable en x_0) $\Longrightarrow$ (f' admet une limite finie en x_0) est fausse.
Indication : on pourra considérer la fonction g définie par : $g(x)=x^2\sin\dfrac{1}{x}$ si $x\neq 0$ et $g(0)=0$.

CCINP 43

Soit $x_0\in\mathbb{R}$. On définit la suite (u_n) par $u_0=x_0$ et, $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=\mathrm{Arctan}(u_n)$.

1. a) Démontrer que la suite (u_n) est monotone et déterminer, en fonction de la valeur de x_0, le sens de variation de (u_n).
b) Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.
2. Déterminer l'ensemble des fonctions h, continues sur $\mathbb{R}$, telles que : $\forall x\in\mathbb{R}$, $h(x)=h(\mathrm{Arctan}\,x)$.

CCINP 72

Soit n un entier naturel non nul. Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n, et soit $e=(e_1,\dots,e_n)$ une base de E.
On suppose que $f(e_1)=f(e_2)=\cdots=f(e_n)=v$, où v est un vecteur donné de E.

1. Donner le rang de f.
2. f est-il diagonalisable ? (discuter en fonction du vecteur v)

CCINP 73 : On pose $A=\begin{pmatrix}2&1\\4&-1\end{pmatrix}$.

1. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A.
2. Déterminer toutes les matrices qui commutent avec la matrice $\begin{pmatrix}3&0\\0&-2\end{pmatrix}$.
En déduire que l'ensemble des matrices qui commutent avec A est $\mathrm{Vect}(I_2,A)$.

CCINP 83

Soit u et v deux endomorphismes d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E.

1. Soit λ un réel non nul. Prouver que si λ est valeur propre de $u\circ v$, alors λ est valeur propre de $v\circ u$.
2. On considère, sur $E=\mathbb{R}[X]$ les endomorphismes u et v définis par $u:P\longmapsto\displaystyle\int_1^X P$ et $v:P\longmapsto P'$.
Déterminer $\mathrm{Ker}(u\circ v)$ et $\mathrm{Ker}(v\circ u)$. Le résultat de la question 1. reste-t-il vrai pour $\lambda=0$?
3. Si E est de dimension finie, démontrer que le résultat de la première question reste vrai pour $\lambda=0$.
Indication : penser à utiliser le déterminant.

5. Programme de MP2I

Extrait du programme officiel :

A. Continuité

Contenus	Capacités & commentaires
Continuité en un point	
Continuité, prolongement par continuité en un point.	La continuité de f au point a de I est définie par la relation $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} f(a)$.
Continuité à gauche, à droite. Caractérisation séquentielle de la continuité en un point. Opérations sur les fonctions continues en un point : combinaison linéaire, produit, quotient, composition.	
Continuité sur un intervalle	
Continuité sur un intervalle.	
Théorème des valeurs intermédiaires.	Principe de démonstration par dichotomie.
Image d'un intervalle par une fonction continue. Corollaire : cas d'une fonction continue strictement monotone. Théorème des bornes atteintes : toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes. Image d'un segment par une fonction continue.	
Une fonction continue sur un intervalle, à valeurs réelles et injective, est strictement monotone.	La démonstration n'est pas exigible.
Toute fonction réelle strictement monotone, définie et continue sur un intervalle, admet une fonction réciproque de même monotonie, définie et continue sur un intervalle.	La démonstration n'est pas exigible.
Fonctions complexes	
Brève extension des définitions et résultats généraux sur les limites et la continuité.	Caractérisation de la limite et de la continuité à l'aide des parties réelle et imaginaire.
Continuité uniforme	
Continuité uniforme. Théorème de Heine.	Exemple des fonctions lipschitziennes. La démonstration n'est pas exigible.

B. Dérivation

Contenus	Capacités & commentaires
Nombre dérivé, fonction dérivée	
Dérivabilité en un point, nombre dérivé. La dérivabilité entraîne la continuité. Dérivabilité à gauche, à droite.	Définition par le taux d'accroissement. Caractérisation : une fonction f est dérivable en a si et seulement si elle admet un développement limité à l'ordre 1 en a. Dans ce cas $$f(a+h)=f(a)+f'(a)h+h\varepsilon(h), \text{ où } \varepsilon(h)\underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0.$$ Interprétation géométrique : tangente. Interprétation cinématique : vitesse instantanée.
Dérivabilité et dérivée sur un intervalle.	
Opérations sur les fonctions dérivables : combinaison linéaire, produit, quotient, composition, réciproque.	Tangente au graphe d'une fonction réciproque.
b) Extremum local et point critique	
Condition nécessaire d'extremum local en un point intérieur.	Un point critique est un zéro de la dérivée.
c) Théorèmes de Rolle et des accroissements finis	
Théorème de Rolle.	
Égalité des accroissements finis.	Interprétations géométrique et cinématique.
Inégalité des accroissements finis : si f est dérivable et si $\lvert f'\rvert$ est majorée par K, alors f est K-lipschitzienne.	La notion de fonction lipschitzienne est introduite à cette occasion. Application à l'étude de suites définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.
Caractérisation des fonctions dérivables constantes, monotones, strictement monotones sur un intervalle.	
Théorème de la limite de la dérivée : si f est continue sur I, dérivable sur $I\setminus\{a\}$ et si $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} f'(x)=\ell\in\mathbb{R}$, alors f est dérivable en a et $f'(a)=\ell$. Extension au cas où $\ell=\pm\infty$.	La fonction f' est alors continue en a.
d) Fonctions de classe $\mathscr{C}^k$	
Pour $k\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$, fonction de classe $\mathscr{C}^k$.	
Opérations sur les fonctions de classe $\mathscr{C}^k$: combinaison linéaire, produit (formule de Leibniz), quotient, composition, réciproque.	Les démonstrations relatives à la composition et à la réciproque ne sont pas exigibles.
e) Fonctions complexes	
Brève extension des définitions et résultats précédents.	Caractérisation de la dérivabilité en termes de parties réelle et imaginaire.
Inégalité des accroissements finis pour une fonction complexe de classe $\mathscr{C}^1$.	On mentionne que l'inégalité résulte d'une simple majoration d'intégrale, justifiée ultérieurement dans la section « Intégration ».

C. Convexité

Contenus	Capacités & commentaires
a) Généralités	
La fonction f est convexe sur I si, pour tous $(x,y)\in I^2$ et $\lambda\in[0,1]$, $f((1-\lambda)x+\lambda y)\leqslant(1-\lambda)f(x)+\lambda f(y)$.	Interprétation géométrique.
Inégalité de Jensen : si f est une fonction convexe sur un intervalle I, on a l'inégalité $$f\Big(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\Big)\leqslant\sum_{i=1}^n\lambda_i f(x_i)$$ quels que soient les réels positifs $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ de somme 1 et quels que soient les éléments $x_1,\dots,x_n$ de I. Caractérisation de la convexité par la croissance des pentes. Position du graphe d'une fonction convexe par rapport à ses sécantes.	Tout développement général sur les barycentres est hors programme.
b) Fonctions convexes dérivables, deux fois dérivables	
Caractérisation des fonctions convexes dérivables. Position du graphe d'une fonction convexe dérivable par rapport à ses tangentes. Caractérisation des fonctions convexes deux fois dérivables.	