Savoir-faire et thèmes classiques – Réduction [I] – MP2I

Savoir-faire

- [ ] Définir un sous-espace stable par un endomorphisme, le caractériser par des bases, l'interpréter sur une matrice par blocs dans une base adaptée, savoir que les droites stables sont les droites engendrées par les vecteurs propres
- [ ] Savoir que l'image, le noyau, les sous-espaces propres d'un endomorphisme sont stables par un endomorphisme avec lequel il commute
- [ ] Définir les éléments propres d'un endomorphisme et d'une matrice, savoir que des sous-espaces propres sont toujours en somme directe
- [ ] Calculer un polynôme caractéristique, en connaître quelques cœfficients, interpréter le déterminant et la trace lorsqu'il est scindé
- [ ] Utiliser le théorème de Cayley-Hamilton
- [ ] Connaître parfaitement les (nombreuses) caractérisations et conditions nécessaires de la diagonalisabilité
- [ ] Connaître les particularités lorsque la matrice est réelle et qu'on la réduit dans $\mathbb{C}$
- [ ] Diagonaliser effectivement une matrice, déterminer une base de sous-espace propre par lecture matricielle ou par résolution de système linéaire
- [ ] Appliquer une diagonalisation à la recherche du terme général de système de suites récurrentes d'ordre 1 ou à une vectorialisation de suite récurrente d'ordre supérieur, à déterminer le commutant d'une matrice, à extraire les racines carrées d'une matrice et, plus généralement, résoudre des équations matricielles
- [ ] Trigonaliser effectivement des petites matrices
- [ ] Définir et caractériser les endomorphismes et matrices nilpotentes

Thèmes Classiques

- [ ] Réduction des matrices compagnes
- [ ] Trigonalisation simultanées
- [ ] Réduction et déterminant de matrice circulante
- [ ] Densité de $\mathscr{GL}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$
- [ ] Réduction des matrices de rang 1
- [ ] Théorème de Gerschgorin de localisation des valeurs propres
- [ ] Réduction par blocs
- [ ] Représentation matricielle d'un endomorphisme nilpotent dans une base adaptée, détermination de commutant et des sous-espaces stables lorsque l'indice de nilpotence est la dimension de l'espace

10

Savoir-faire et thèmes classiques – Fonctions numériques – MP2I

1 Continuité, dérivabilité

Savoir-faire

- ☐ Traduire une limite avec des quantificateurs
- ☐ Montrer une convergence vers une limite en majorant la norme de la différence par une suite tendant vers 0
- ☐ Écrire et manipuler des relations de comparaison $o, \mathcal{O}$ ou $\sim$ entre fonctions numériques
- ☐ Traduire la continuité et l'uniforme continuité et leurs caractérisations séquentielles
- ☐ Utiliser le théorème des valeurs intermédiaires et ses extensions (avec des limites) Exemple : problèmes de point fixe
- ☐ Utiliser le théorème des bornes atteinte (étendu aux compacts)
- ☐ Utiliser le théorème de la bijection
- ☐ Utiliser le théorème de Heine (étendu aux compacts)
- ☐ Traduire une lipschitzianité
- ☐ Traduire la continuité d'une fonction vectorielle coordonnée à coordonnée dans une base
- ☐ Étudier la continuité d'une fonction de plusieurs variables
- ☐
- ☐ Montrer que deux applications continues sont égales car elles coïncident sur une partie dense
- ☐ Traduire une dérivabilité à l'aide d'un taux d'accroissement ou d'un DL_1
- ☐ Dériver les fonctions usuelles (une ou plusieurs fois)
- ☐ Effectuer une étude de fonction pour montrer une inégalité, déterminer des extremums, calculer une norme infini, montrer une bijectivité, etc.
- ☐ Étudier la dérivabilité de la réciproque d'une bijection
- ☐ Calculer des dérivées successives, utiliser la formule de Leibniz
- ☐ Utiliser la condition nécessaire d'extremum local, le théorème de Rolle, le théorème des accroissements finis, l'inégalité des accroissements finis, le théorème de la limite de la dérivée
- ☐ Utiliser le principe de la démonstration du théorème des accroissements finis

Thèmes Classiques

- ☐ Un polynôme réel de degré impair admet une racine réelle
- ☐ Résoudre l'équation fonctionnelle

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

avec f continue en 0
- ☐ Théorème du point fixe d'une fonction continue sur un intervalle stable
- ☐ Utilisation du théorème de Rolle pour l'étude des dérivées de polynômes réels simplement scindés ou scindés
- ☐ Utilisation du théorème de Rolle pour montrer que les polynômes de Legendre sont simplement scindés
- ☐ Généralisations du théorème de Rolle
- ☐ Majoration de l'erreur dans l'interpolation de Lagrange
- ☐ Égalité de Taylor-Lagrange
- ☐ Théorème de Darboux

2 Convexité

Savoir-faire

- ☐ Définir et donner toutes les caractérisations (cordes, épigraphe, inégalité des trois cordes, taux d'accroissement, dérivée première, dérivée seconde) de la convexité
- ☐ Utiliser l'inégalité de Jensen
- ☐ Reconnaître une inégalité de convexité sous forme de somme ou de produit

Thèmes Classiques

- ☐ Inégalité arithmético-géométrique
- ☐ Théorème de Gauß-Lucas
- ☐ Inégalité de Jensen continue
- ☐ Point de continuité, de dérivabilité à gauche ou à droite d'une fonction convexe