12

Intégrales généralisées

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
On souhaite généraliser la notion d'intégrale à des intervalles qui ne sont pas des segments.

I Intégrale généralisée sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$

Soit $a \in \mathbb{R}$ fixé.

1 Intégrale convergente en $+\infty$

Définition 1 : Intégrale convergente en $+\infty$

Soit f continue par morceaux sur $[a, +\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{K}$. On dit que $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ est **convergente** lorsque

$x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ a une limite finie lorsque $x \to +\infty$.

Dans ce cas, on note $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ ou $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ cette limite.

Remarque

R 1 – Lorsque $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ diverge, l'objet $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ n'a aucun sens... sauf dans le cas où f est à valeurs réelles positives (cf partie suivante).

Exemple

E 1 – $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$

E 2 – $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t}$

Propriété 1 : Intégrales de Riemann

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. L'intégrale dite de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Propriété 2 : Intégrales exponentielles

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\alpha > 0$

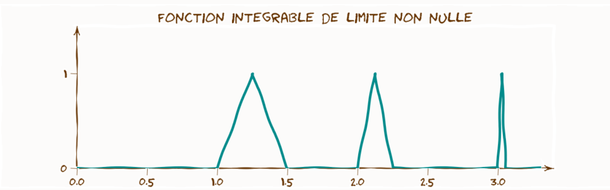
Exercice 1 : Cas particulier d'intégrales de Bertrand

Donner une condition nécessaire et suffisante sur le réel β pour que l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(\ln t)^\beta}$ converge.

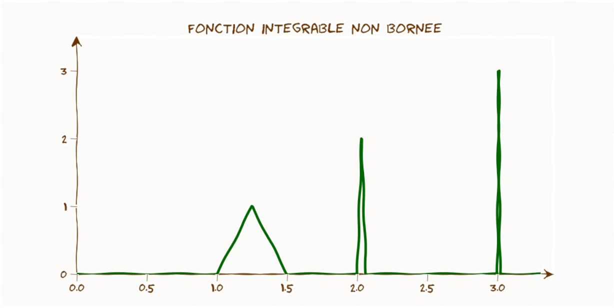
Remarque

R 2 – ⚠ $\sum u_n$ converge $\Longrightarrow u_n \to 0$. Ce n'est plus le cas pour la convergence de $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$.

Par exemple, si on considère la fonction f nulle partout sauf entre n et $n + \dfrac{2}{n^2}$ où elle dessine un triangle isocèle de hauteur 1, d'aire $\dfrac{1}{n^2}$ pour tout $n \geqslant 2$. Alors $f \geqslant 0$, $\displaystyle\int_a^x f \leqslant \sum_{n=2}^{\lfloor x \rfloor} \frac{1}{n^2} \leqslant \frac{\pi^2}{6} - 1$ et $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f$ est croissante donc $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ converge, et pourtant $f(x) \not\to 0$ lorsque $x \to +\infty$.



On peut même construire une fonction f non bornée dont l'intégrale converge : il suffit que les triangles soient de hauteur n et de base $\dfrac{2}{n^3}$.



Par contre, si f a une limite non nulle, l'intégrale diverge.

Propriété 3 : Linéarité

Soient $f, g \in \mathscr{C}_m([a,+\infty[,\mathbb{K})$, $\lambda \in \mathbb{K}$, telles que $\int_a^{+\infty} f$ et $\int_a^{+\infty} g$ convergent.
Alors $\int_a^{+\infty} (f+\lambda g)$ converge et

$$\int_a^{+\infty} (f+\lambda g) = \int_a^{+\infty} f + \lambda \int_a^{+\infty} g.$$

Propriété 4 : Choix de la borne inférieure

Soit $f \in \mathscr{C}_m([a,+\infty[,\mathbb{K})$ et $b \geqslant a$
$\int_a^{+\infty} f$ cv ssi $\int_b^{+\infty} f$ cv
le cas échéant, $\int_a^{+\infty} f = \int_a^b f + \int_b^{+\infty} f$.

Propriété 5 : Dérivation de $x \mapsto \int_x^{+\infty} f$

Soient $f \in \mathscr{C}([a,+\infty[,\mathbb{K})$ tel que $\int_a^{+\infty} f$ converge.
Alors
$\varphi : x \longmapsto \int_x^{+\infty} f$ est $\mathscr{C}^1$ sur $[a,+\infty[$ et $\varphi' = -f$.

– φ est l'unique primitive de f qui tend vers 0 en $+\infty$.

2 Cas des fonctions réelles positives

Propriété 6 : Cas des fonctions réelles positives

Soit $f \in \mathscr{C}_m([a,+\infty[,\mathbb{R}^+)$.
Alors $F : x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ est une fonction croissante

$\int_a^{+\infty} f$ converge si et seulement si F majorée.

Définition 2 : Intégrale de fonction positive

Soit $f \in \mathscr{C}_m([a,+\infty[,\mathbb{R}^+)$.
On pose $\int_a^{+\infty} f$ la limite finie ou $+\infty$ de $F : x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ en $+\infty$.

Remarque

R 3 – On se permet donc d'écrire $\int_a^{+\infty} f = +\infty$ en cas de divergence, **seulement dans le cas où f est à valeurs réelles positives.**

Théorème 1 : Convergence d'intégrales de fonctions positives par comparaison

Soient $f, g \in \mathscr{C}_m([a, +\infty[, \mathbb{R}^+)$, tel que

H1 $\int_a^{+\infty} g$ converge

H2 *L'une des trois hypothèses suivantes est vérifiée*

$0 \le f \le g$ ou $f(x) = \underset{x\to+\infty}{o}(g(x))$ ou $f(x) = \underset{x\to+\infty}{O}(g(x))$

alors

C1 $\int_a^{+\infty} f$ converge

Remarque

R 4 – Similaire aux séries.
Il est indispensable que les fonctions soient à valeurs positives !

Théorème 2 : Divergence d'intégrales de fonctions positives par comparaison

Soient $f, g \in \mathscr{C}_m([a, +\infty[, \mathbb{R}^+)$, tel que

H1 $\int_a^{+\infty} g$ diverge

H2 *L'une des trois hypothèses suivantes est vérifiée*

alors $g \le f$ ou $g = \underset{+\infty}{o}(f)$ ou $g = \underset{+\infty}{O}(f)$

C1 $\int_a^{+\infty} f$ diverge

(contraposée du thm 1)

Théorème 3 : Convergence d'intégrales de fonctions positives par équivalent

Soient $f, g \in \mathscr{C}_m([a, +\infty[, \mathbb{R}^+)$ telles que $f \underset{+\infty}{\sim} g$. Alors
$\int_a^{+\infty} f$ et $\int_a^{+\infty} g$ ont même nature.

(Si $f \sim g$, alors $f = O(g)$ et $g = O(f)$ ... comme pour les séries)

3 Intégrabilité sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$

Définition 3 : Fonction intégrable

Une fonction f est dite **intégrable** sur $[a, +\infty[$ lorsqu'elle est continue par morceaux sur $[a, +\infty[$ et que $\int_a^{+\infty} |f(t)|dt$ converge.

On dit aussi que $\int_a^{+\infty} f$ est **absolument convergente.**

On note $f \in L^1([a, +\infty[, \mathbb{K})$.

Exemple

E 3 – **Intégrales de Riemann** : $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ si et seulement si $\alpha > 1$.

E 4 – **Intégrales exponentielles** : $x \mapsto e^{-\alpha x}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ si et seulement si $\alpha > 0$.

(elles sont ≥ 0 donc intégrable $\Leftrightarrow$ l'intégrale converge.)

Théorème 4 : l'absolue convergence entraîne la convergence

Si f est intégrable sur $[a, +\infty[$, alors $\int_a^{+\infty} f$ converge.

La réciproque est fausse en général mais vrai pour des fonctions de signe constant.

Remarque

R 5 – Le programme stipule que « Un calcul montrant que $\int_a^{+\infty} |f| < +\infty$ vaut preuve d'intégrabilité. »
C'est puissant ! On peut travailler dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ lorsque la fonction est positive, et obtenir l'intégrabilité lorsque le résultat n'est pas $+\infty$.

Remarque

R 6 – Une intégrale $\int_a^{+\infty} f$ convergente mais non absolument convergente et dite semi-convergente.

R 7 – Comme on l'a vu avec cet exemple, dans la pratique, pour procéder à une intégra-

CC BY NC SA

tion par partie, on se ramène à une borne finie x puis on passe à la limite. Cela éviter de risquer d'écrire des termes qui n'existent pas. Voir plus loin.

Théorème 5 : Intégrabilité par comparaison

Soient $f, g \in \mathscr{C}_m([a, +\infty[, \mathbb{R}^+)$.

- *On suppose que*

  H1 g *est intégrable sur* $[a, +\infty[$

  H2 *L'une des trois hypothèses suivantes est vérifiée*

$$f \leqslant g \quad \text{ou} \quad f = \underset{+\infty}{\mathcal{O}}(g) \quad \text{ou} \quad f = \underset{+\infty}{o}(g),$$

  alors

  C1 f *est intégrable sur* $[a, +\infty[$.

- *Si* $f \underset{+\infty}{\sim} g$, *alors* f *est intégrable sur* $[a, +\infty[$ *si et seulement si* g *l'est.*

Remarque

R 8 – Si les fonctions ne sont pas à valeurs positives, on met des valeurs absolues/modules. Ainsi, si $f, g \in \mathscr{C}_m([a, +\infty[, \mathbb{K})$ tel que g est intégrable sur $[a, +\infty[$ et ($f = \underset{+\infty}{\mathcal{O}}(g)$ ou $f = \underset{+\infty}{o}(g)$), alors ($|f| = \underset{+\infty}{\mathcal{O}}(|g|)$ ou $|f| = \underset{+\infty}{o}(|g|)$) donc $\displaystyle\int_a^{+\infty} |f|$ converge.
Et si $f \sim g$, alors $|f| \sim |g|$ et $\displaystyle\int_a^{+\infty} |f|$ converge si et seulement si $\displaystyle\int_a^{+\infty} |g|$ converge.

Corollaire 1 : Intégrabilité par comparaison, cas général

Soient $f, g \in \mathscr{C}_m([a, +\infty[, \mathbb{K})$.

- *Si* g *est intégrable sur* $[a, +\infty[$ *et que l'une des deux hypothèses suivantes est vérifiée : au voisinage de* $+\infty$,

$$|f| \leqslant |g| \quad \text{ou} \quad f = \underset{+\infty}{\mathcal{O}}(g) \quad \text{ou} \quad f = \underset{+\infty}{o}(g),$$

  alors f *est intégrable sur* $[a, +\infty[$.

- *Si* $f \underset{+\infty}{\sim} g$, *alors* f *est intégrable sur* $[a, +\infty[$ *si et seulement si* g *l'est.*

Exercice 2 : CCINP 25 question 1.

Démontrer que, pour tout entier naturel n, la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{1+t^2+t^n e^{-t}}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

Exercice 3

Montrer que $x \mapsto \dfrac{x^2+3x+1}{x^4+x^2+1}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

Exercice 4

Montrer que $x \mapsto e^{-x^2}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

Exercice 5 : Classique : intégrales de Bertrand

Montrer que $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^\alpha \ln^\beta x}$ est intégrable sur $[2, +\infty[$ si et seulement si $\alpha > 1$ ou ($\alpha = 1$ et $\beta > 1$).
(Même résultat que sur les séries.)

4 Comparaison série-intégrale (complément)

Le résultat suivant est désormais hors-programme mais intéressant.

Exercice 6

Soient $n_0 \in \mathbb{N}$, $f : [n_0, +\infty[\to \mathbb{R}$ tel que

H1 f est continue par morceaux,

H2 f est décroissante,

H3 f est positive

alors

C1 $\displaystyle\sum_{n \geqslant n_0} f(n)$ converge si et seulement si f est intégrable sur $[n_0, +\infty[$.

II Intégrale généralisée sur un intervalle quelconque

1 Cas d'un intervalle semi-ouvert

On généralise les résultats précédents aux intervalles de la forme $[a,b[$ ou $]a,b]$ avec $a,b \in \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ tels que $a<b$.

Définition 4 : Intégrale convergente

Soit f continue par morceaux sur $[a,b[$ (respectivement $]a,b]$) à valeurs dans $\mathbb{K}$.

On dit que $\int_a^b f$ est **convergente** lorsque $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ a une limite finie en b (respectivement $x \mapsto \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$ a une limite finie en a).

Dans ce cas, on note $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ ou $\int_a^b f$ cette limite.

Lorsque f **est à valeur réelles positives** et que $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge, on note $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = +\infty$.

On dit que f est **intégrable** sur $[a,b[$ (respectivement $[a,b[$) lorsque $\int_a^b |f|$ converge, et on note $f \in L^1([a,b[,\mathbb{K})$ (respectivement $f \in L^1(]a,b],\mathbb{K})$.)

Remarque

R 9 – On dit aussi que f est intégrable en b (respectivement en a).

R 10 – Si la borne ouverte est finie et que f possède une limite finie au point, il suffit de faire un prolongement par continuité : on est ramené à une intégrale sur un segment.

Par exemple, $\int_0^\pi \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ converge sans problème.

R 11 – Le programme stipule que « Pour une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, un calcul aboutissant à un résultat fini vaut preuve de convergence. »

Exemple

E 5 – $\tan$ n'est pas intégrable sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$.

Propriété 7 : Intégrales de Riemann

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

- $x \mapsto \frac{1}{|x|^\alpha}$ *est intégrable sur* $[1,+\infty[$ (*respectivement* $]-\infty,-1]$) *si et seulement si*

$\alpha > 1$

- $x \mapsto \frac{1}{|x|^\alpha}$ *est intégrable sur* $]0,1]$ (*respectivement* $[-1,0[$) *si et seulement si*

$\alpha < 1$

Pour $\alpha = 1$: intégrable ni en 0 ni en $\pm\infty$.

Exemple

E 6 – $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}, \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t}$ et $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$

Théorème 6 : Intégrabilité par comparaison, cas positif

Soient $f,g \in \mathscr{C}_m([a,b[,\mathbb{R}^+)$.

- *Si g est intégrable sur $[a,b[$ et que l'une des trois hypothèses suivantes est vérifiée*

$$\text{Au voisinage de } b,\ f \leqslant g \quad \text{ou} \quad f = \underset{b}{O}(g) \quad \text{ou} \quad f = \underset{b}{o}(g),$$

alors f est intégrable sur $[a,b[$.

- *Si $f \underset{b}{\sim} g$, alors f est intégrable sur $[a,b[$ si et seulement si g l'est.*

On a un énoncé analogue sur $]a,b]$ en comparant au voisinage de a.

Remarque

R 12 – Et de nouveau, si les fonctions ne sont pas réelles positives (ni de signe constant), on passe aux valeurs absolues / modules.

CC BY NC SA

Corollaire 2 : Intégrabilité par comparaison, cas général

Soient $f, g \in \mathscr{C}_m([a,b[,\mathbb{K})$.

- *Si g est intégrable sur $[a,b[$ et que l'une des deux hypothèses suivantes est vérifiée : au voisinage de b,*

$$|f| \leqslant |g| \quad \text{ou} \quad f = \underset{b}{O}(g) \quad \text{ou} \quad f = \underset{b}{o}(g),$$

alors f est intégrable sur $[a,b[$.

- *Si $f \underset{b}{\sim} g$, alors f est intégrable sur $[a,b[$ si et seulement si g l'est.*

On a un énoncé analogue sur $]a,b]$ en comparant au voisinage de a.

Propriété 8 : Indépendance du choix de l'autre borne

Soit f continue par morceaux sur $[a,b[$, $c \in [a,b[$.
Alors $\displaystyle\int_a^b f$ converge si et seulement si $\displaystyle\int_c^b f$ converge.
On a un résultat analogue pour une fonction continue par morceaux sur $]a,b]$.

Propriété 9 : Cas d'une fonction prolongeable par continuité

Soit $-\infty < a < b < +\infty$ et f continue par morceaux sur $[a,b[$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.
On suppose que f a une limite finie en b, c'est-à-dire qu'elle est prolongeable par continuité en une fonction $\tilde{f}$ continue par morceaux sur $[a,b]$.
Alors f est intégrable sur $[a,b[$.
On a un énoncé analogue sur $]a,b]$.

2 Cas d'un intervalle ouvert

Définition 5 : Convergence d'intégrale et intégrabilité sur un intervalle ouvert

Soit f continue par morceaux sur $]a,b[$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.

On dit que $\displaystyle\int_a^b f$ est **convergente** lorsqu'il existe $c \in]a,b[$ (qui est en fait quelconque d'après la propriété précédente) tel que $\displaystyle\int_a^c f$ et $\displaystyle\int_c^b f$ sont convergentes.

Dans ce cas, on note

$$\int_a^b f = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

On dit que f est **intégrable** sur $]a,b[$ lorsque $\displaystyle\int_a^b |f|$ converge et on note $f \in L^1(]a,b[,\mathbb{K})$.

Exemple

E 7 – Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$

Remarque

R 13 – ⚠ Il faut démontrer la convergence des deux intégrales séparément !

Exemple

E 8 – $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \tan t\,\mathrm{d}t$ diverge alors que pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, $\displaystyle\int_{-x}^{x} \tan t\,\mathrm{d}t = 0$.

3 Intégrabilité sur un intervalle quelconque

I est un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide.

Théorème 7 : L'intégrabilité implique la convergence de l'intégrale

Soit f continue par morceaux sur I. Si f est intégrable sur I, alors $\displaystyle\int_I f$ converge.

On démo que $I = [a,+\infty[$

Propriété 10 : Espace vectoriel $L^1(I, \mathbb{K})$

- *L'ensemble des fonctions continues par morceaux intégrables sur I a une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Cet espace vectoriel est noté $L^1(I, \mathbb{K})$.*
- *L'application $f \mapsto \int_I f$ est une forme linéaire de cet espace.*

Remarque

R 14 – Donc si f, g intégrables sur I, alors $\int_I (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_I f + \beta \int_I g$.

R 15 – ⚠ Comme pour les séries, il faut y réfléchir à deux fois avant de séparer une intégrale généralisée en deux : on a vite fait de manipuler des termes qui n'existent pas... Mais dans le cas des fonctions **positives**, le programme autorise de travailler dans $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$.

R 16 – C'est encore le cas en prenant plus généralement les fonctions dont l'intégrale converge. Cependant, l'espace vectoriel en question n'a pas de nom particulier.

Propriété 11 : Inégalité triangulaire

Si f est intégrable sur I, $\left|\int_I f\right| \leqslant \int_I |f|$

Propriété 12 : Cas des fonctions à valeurs complexes

Si f est à valeurs complexes, $\int_I f$ converge si et seulement si $\int_I \mathfrak{Re}(f)$ et $\int_I \mathfrak{Im}(f)$ convergent.

Dans ce cas, $\int_I f = \int_I \mathfrak{Re}(f) + \mathrm{i} \int_I \mathfrak{Im}(f)$.

4 Étude et rédaction de l'existence d'une intégrale

Méthode 1 : Étudier l'intégrabilité de f sur un intervalle I ou étudier la convergence de $\int_a^b f$

(ce n'est pas la même chose !)

Position du problème

- Si I est un segment, il n'y a pas de problème.
- Si I est un intervalle bornée sur lequel f est bornée, alors f est intégrable par comparaison à une fonction constante qui est intégrable. C'est le cas par exemple si la fonction est continue et prolongeable par continuité en une borne ouverte (et c'est alors encore plus simple à justifier : il suffit de considérer l'intégrale sur un segment du prolongement, qui ne présente pas de problème).
- Si I est un intervalle ouvert $]a, b[$, on étudie séparément l'existence de $\int_a^c f$ et $\int_c^b f$. Le réel c est choisi quelconque dans $]a, b[$ et on est ramené à une étude sur $]a, c]$ et $[c, b[$ (semi-ouverts).

Cas des fonctions positives

Dans ce cas, la convergence de l'intégrale est équivalente à l'intégrabilité. Bien insister dans la rédaction :

« La fonction $f : x \mapsto \cdots$ est continue (par morceaux), **positive** sur l'intervalle ... »

en précisant bien l'intervalle.
S'il est ouvert, on coupe en deux et on étudie **séparément** les deux intégrabilités.

Cas des fonctions non positives

... ni négatives.
Dans ce cas, on s'intéresse soit à l'intégrabilité (absolue convergence), soit à la (semi)-convergence de l'intégrale (mais cette dernière n'est pas un objectif du programme).

Exercice 7

$x \mapsto \cos^3(1/x)$ **sur** $]0, 1]$.

Exercice 8

Étudier l'existence de $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} \mathrm{e}^{-t} \, \mathrm{d}t$ **où** $x \in \mathbb{R}$.

CC BY NC SA

Exercice 9

Existence de $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\sin(xt)\,\mathrm{d}t$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Remarque

R 17 – ⚠ Mauvaise rédaction :

$$\left|\int_0^x \mathrm{e}^{-t}\sin(xt)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^x \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \leqslant 1 \ldots$$

Comme pour les séries, c'est à la fonction qu'on s'intéresse et non aux « intégrales partielles ».

Exercice 10 : CCINP 28

N.B. : les deux questions sont indépendantes.

1. La fonction $x \longmapsto \dfrac{e^{-x}}{\sqrt{x^2-4}}$ est-elle intégrable sur $]2,+\infty[$?
2. Soit a un réel strictement positif.
   La fonction $x \longmapsto \dfrac{\ln x}{\sqrt{1+x^{2a}}}$ est-elle intégrable sur $]0,+\infty[$?

III Propriétés des intégrales généralisées

1 Relation de Chasles

La notion d'intégrale généralisée se... généralise au cas où les bornes ne sont pas dans le bon sens.

Propriété 13 : Relation de Chasles

Soit $f \in \mathscr{C}_m(I,\mathbb{K})$ telle que $\int_I f$ converge.

(i) *Si J sous-intervalle de I, alors $\int_J f$ converge.*

(ii) *Si $a,b,c \in \overline{I}$ éventuellement infinis,*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f,$$

toutes ces intégrales étant bien convergentes.

2 Propriétés liées à l'ordre

Propriétés 1 : liées à l'ordre

Soient $f,g \in \mathscr{C}_m(I,\mathbb{R})$ telles que $\int_I f$ et $\int_I g$ convergent.

Positivité :

Croissance :

Positivité améliorée :

*De façon équivalente, si f est positive, **continue**, non identiquement nulle sur I alors*

3 Intégrale généralisée dépendant d'une borne

Propriété 14 : Dérivation

Les bornes ouvertes peuvent être éventuellement infinies.

Si f est continue sur $[a,b[$ et si $\int_a^b f$ converge, alors $g : x \mapsto \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b[$ et $g' =$

Si f est continue sur $]a,b]$ et si $\int_a^b f$ converge, alors $h : x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]a,b]$ et $h' =$

Remarque

R 18 – Se retrouve avec une primitive.

IV CHANGEMENTS DE VARIABLE, INTÉGRATIONS PAR PARTIES

1 Changement de variable

Théorème 8 : Changement de variable

*Soit $\alpha, \beta, a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ et $\varphi :]\alpha, \beta[\to]a, b[$ une **bijection** de classe $\mathscr{C}^1$. Alors φ est strictement monotone.*

On suppose que $\varphi(u) \xrightarrow[u\to\alpha]{} a$ et $\varphi(u) \xrightarrow[u\to\beta]{} b$ (quitte à échanger les bornes des intervalles).

Alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$ sont de même nature. En cas de convergence, elles sont égales.

Remarque

R 19 – Même nature est à prendre au sens convergentes ou divergentes ou absolument convergentes ou semi-convergentes.
C'est donc **très utile** pour étudier la nature d'une intégrale généralisée.

R 20 – Le programme autorise l'utilisation sans justification dans les cas usuels : φ fonction affine, puissance, exponentielle, logarithme.

R 21 – Mais il vaut mieux insister. Faire un changement de variable avec une rédaction de la forme :« Changement de variable $t = \varphi(u)$ où $\varphi : \cdots \to \cdots$ **bijective et de classe** $\mathscr{C}^1$ ». On peut alors exprimer $u = \varphi^{-1}(t)$.

R 22 – Sur un segment, la bijectivité n'était pas nécessaire, ici elle l'est.

Exercice 11

Trouver un lien entre l'intégrale $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ et $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 12

Exprimer, pour $n \in \mathbb{N}$, $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^n}$ à l'aide des intégrales de Wallis $W_k = \int_0^{\pi/2} \sin^k t\,\mathrm{d}t$.

Exercice 13

Déduire de l'étude des intégrales de Bertrand au voisinage de $+\infty$, celle de ces mêmes intégrales sur $\left]0, \frac{1}{2}\right]$, à l'aide du changement de variable $u = \frac{1}{t}$.

Propriété 15 : Intégrales de Riemann

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $a, b \in \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{|x-a|^\alpha}$ est intégrable sur $[b, a[$ (respectivement $]a, b]$) si et seulement si

Remarque

R 23 – Plus généralement, via un changement de variable, la fonction f est intégrable en a (resp. b) si et seulement si $t \mapsto f(a+t)$ (resp. $t \mapsto f(b-t)$) est intégrable en 0.

2 Intégration par parties

On ne fait pas d'intégration par partie sur des intégrales généralisées : on pourrait faire apparaître des termes qui n'existent pas.

Donc on repasse à une intégrale sur un segment, on intègre par parties puis on passe à la limite.

Remarque

R 24 – Le programme donne tout de même un résultat, qu'on évitera d'utiliser : si f et g ont des limites finies en a et en b (« si le crochet existe »), les intégrales $\int_a^b f'g$ et $\int_a^b fg'$ sont toutes les deux convergentes ou toutes les deux divergentes (mais seulement l'une peut être semi-convergente contrairement au changement de variable). Et en cas de convergence, on peut écrire

$$\int_a^b f'g = \left[fg\right]_a^b - \int_a^b fg'$$

(ou le crochet est à prendre au sens des limites.)
Il est largement préférable, dans la pratique, de repasser par une intégration par partie classique sur un segment, avant de passer à la limite.

Exercice 14

Si $x > 0$, on pose $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$. Trouver une relation entre $\Gamma(n+1)$ et $\Gamma(n)$ et en déduire $\Gamma(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 15 : CCINP 19

Prouver que, pour tout entier naturel n, $f_n : t \longmapsto t^n \ln t$ est intégrable sur $]0,1]$ et calculer $I_n = \displaystyle\int_0^1 t^n \ln t \, dt$.

Exercice 16

Soit la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\int_1^x e^{t^2} \, dt$.

1. Déterminer la limite de $f(x)$ en $+\infty$.
2. Déterminer un équivalent de f en $+\infty$.

V Intégration des relations de comparaison

Théorème 9 : Intégration des relations de comparaison

*Soit $f \in \mathscr{C}_m([a,b[,\mathbb{K})$ et $g \in \mathscr{C}_m([a,b[,\mathbb{R}^+)$ une fonction à valeurs **réelles positives**.*

Cas de divergence *Si $\displaystyle\int_a^b g$ diverge et*

(i) *si $f = \underset{b}{\mathcal{O}}(g)$, alors*

(ii) *si $f = \underset{b}{o}(g)$, alors*

(iii) *Si $f \underset{b}{\sim} g$, alors*

Cas de convergence *Si $\displaystyle\int_a^b g$ converge et*

(i) *si $f = \underset{b}{\mathcal{O}}(g)$, alors f intégrable et*

(ii) *si $f = \underset{b}{o}(g)$, alors f intégrable et*

(iii) *Si $f \underset{b}{\sim} g$, alors f intégrable et*

On a un énoncé analogue sur $]a,b]$.

Remarque

R 25 – Noter l'analogie avec les sommes partielles et les restes des séries.

R 26 – Comme pour les séries, la fonction de référence est toujours à valeurs réelles positives.