11

Régularité des suites et séries de fonctions

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, I est un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux points, X une partie non vide $\mathbb{R}$.

I Suites de fonctions

1 Intégration sur un segment

Théorème 1 : Interversion limite et intégrale

Si $a, b \in \mathbb{R}$, $f : [a, b] \to \mathbb{K}$ et $(f_n)_n$ une suite de fonction de $\mathbb{K}^{[a,b]}$ tel que

H1 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[a, b]$*

H2 *La suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur $[a, b]$*

alors

C1 *f est continue sur $[a, b]$*

C2 $\displaystyle\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$

Méthode 1 : Pour montrer qu'on n'a pas convergence uniforme...

Il suffit qu'on n'ait pas $\displaystyle\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$

Théorème 2 : Convergence uniforme de primitive

Soient $f : I \to \mathbb{K}$ et $(f_n)_n$ une suite de fonction de $\mathbb{K}^I$, $a \in I$. On suppose que

H1 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur I.*

H2 *La suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur tout segment de I.*

Alors on pose $F_n : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f_n(t)\,\mathrm{d}t$ l'unique primitive de f_n qui s'annule en a et

C1 *f est continue sur I donc $F : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ unique primitive de f qui s'annule en a existe bien,*

C2 *$(F_n)_n$ converge uniformément vers F sur tout segment de I.*

2 Dérivation

Théorème 3 : Interversion limite et dérivée

Soient $f : I \to \mathbb{K}$ et $(f_n)_n$ une suite de fonction de $\mathbb{K}^I$. On suppose que

H1 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.*

H2 *La suite $(f_n)_n$ converge simplement vers f sur I.*

H3 *La suite $(f_n')_n$ converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction g.*

Alors

C1 *f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.*

C2 *$f' = g$ c'est-à-dire « $(\lim f_n)' = \lim f_n'$ ».*

C3 *$(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur tout segment de I.*

Théorème 4 : Généralisation à la classe $\mathscr{C}^k$

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonction de $\mathbb{K}^I$, $p \in \mathbb{N}^*$. On suppose que

H1 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n de classe $\mathscr{C}^k$ sur I.*

H2 *Pour tout $j \in [\![0, k-1]\!]$, la suite $\left(f_n^{(j)}\right)_n$ converge simplement vers une fonction g_j sur I.*

H3 *La suite $\left(f_n^{(k)}\right)_n$ converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction g_k.*

Alors

C1 *$f = g_0$ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I.*

C2 *Pour tout $j \in [\![0, k]\!]$, $f^{(j)} = g_j$ c'est-à-dire « $(\lim f_n)^{(j)} = \lim f_n^{(j)}$ ».*

C3 *Pour tout $j \in [\![0, k]\!]$, $\left(f_n^{(j)}\right)_n$ converge uniformément sur tout segment de I.*

Théorème 5 : Généralisation à la classe $\mathscr{C}^\infty$

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonction de $\mathbb{K}^I$. On suppose que

H1 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I.*

H2 *La suite $(f_n)_n$ converge simplement vers une fonction f sur I.*

H3 *Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la suite $\left(f_n^{(k)}\right)_n$ converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction g_k.*

Alors

C1 *f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I.*

C2 *Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $f^{(k)} = g_k$ c'est-à-dire $(\lim f_n)^{(k)} = \lim f_n^{(k)}$.*

II Séries de fonctions

Les théorèmes sur les séries de fonctions se déduisent directement des théorèmes sur les suites de fonctions en les appliquant aux suites de sommes partielles.

1 Intégration sur un segment

Théorème 6 : Interversion série-intégrale sur un segment

Si $a, b \in \mathbb{R}$, $(f_n)_n$ une suite de fonction de $\mathbb{K}^{[a,b]}$ tel que

H1 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[a,b]$.*

H2 *La série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément vers f sur $[a,b]$*

alors

C1 $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ *est continue sur $[a,b]$.*

C2 $\sum \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t$ *converge.*

C3 $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t.$

2 Primitive

Théorème 7 : Interversion série et primitive

Soient $(f_n)_n$ une suite de fonction de $\mathbb{K}^I$, $a \in I$. On suppose que

H1 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur I.*

H2 *La série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément vers $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ sur tout segment de I.*

Alors on pose $F_n : x \mapsto \int_a^x f_n(t)\,\mathrm{d}t$ l'unique primitive de f_n qui s'annule en a et

C1 *f est continue sur I donc $F : x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ unique primitive de f qui s'annule en a existe bien,*

C2 *La série de fonctions $\sum F_n$ converge uniformément sur tout segment de I et $F = \sum_{n=0}^{+\infty} F_n$.*

3 Classe $\mathscr{C}^k$

Théorème 8 : Classe $\mathscr{C}^k$ d'une série de fonctions

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonction de $\mathbb{K}^I$, $k \in \mathbb{N}^*$. On suppose que

H1 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n de classe $\mathscr{C}^k$ sur I.*

H2 *Pour tout $j \in [\![0, k-1]\!]$, la série de fonctions $\sum f_n^{(j)}$ converge simplement sur I.*

H3 *La série de fonctions $\sum f_n^{(k)}$ converge uniformément sur tout segment de I.*

Alors

C1 $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ *est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I.*

C2 *Pour tout $j \in [\![0, k]\!]$, $f^{(j)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(j)}$.*

C3 *Pour tout $j \in [\![0, k]\!]$, $\sum f_n^{(j)}$ converge uniformément sur tout segment de I.*

Théorème 9 : Classe $\mathscr{C}^\infty$ d'une série de fonctions

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonction de $\mathbb{K}^I$. On suppose que

H1 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I.*

H2 *La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur I.*

H3 *Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la série de fonctions $\sum f_n^{(k)}$ converge uniformément sur tout segment de I.*

Alors

C1 $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ *est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I.*

C2 *Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^{(k)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(k)}$.*