

# Régularité des suites et séries de fonctions

$\mathbb{K}$  désigne  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ,  $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$  contenant au moins deux points,  $x$  une partie non vide  $\mathbb{R}$ .

## SUITES DE FONCTIONS

### 1 Intégration sur un segment

#### Théorème 1 : Interverson limite et intégrale

Si  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$  et  $(f_n)_n$  une suite de fonction de  $\mathbb{K}^{[a,b]}$  tel que

H1

H2

alors

C1

C2



**Méthode 1 : Pour montrer qu'on n'a pas convergence uniforme...**

Il suffit qu'on n'ait pas  $\int_a^b f_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) dt$ .

Exercice 1 : CCINP 10

Exercice 2 : CCINP 48

#### Théorème 2 : Convergence uniforme de primitive

Soient  $f : I \rightarrow \mathbb{K}$  et  $(f_n)_n$  une suite de fonction de  $\mathbb{K}^I$ ,  $a \in I$ . On suppose que

H1

H2

Alors on pose  $F_n : x \mapsto \int_a^x f_n(t) dt$  l'unique primitive de  $f_n$  qui s'annule en  $a$  et

C1

C2

#### Remarque

R1 – En fait, le premier théorème est une conséquence du second, en prenant  $I = [a, b]$ , on obtient bien  $F_n(b) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} F(b)$ .

### 2 Dérivation

#### Théorème 3 : Interverson limite et dérivée

Soient  $f : I \rightarrow \mathbb{K}$  et  $(f_n)_n$  une suite de fonction de  $\mathbb{K}^I$ . On suppose que

H1

H2

H3

Alors

C1

C2

C3

**Remarque**

R2 – Vrai avec l'hypothèse plus faible de dérivabilité des  $f_n$ , mais hors-programme.

**Théorème 4 : Généralisation à la classe  $\mathcal{C}^k$** 

Soit  $(f_n)_n$  une suite de fonction de  $\mathbb{K}^I$ ,  $p \in \mathbb{N}^*$ . On suppose que

H1

H2

H3

Alors

C1

C2

C3

**Remarque**

R3 – Pour obtenir une classe  $\mathcal{C}^\infty$ , il suffit que les  $f_n$  le soit et que la convergence des  $(f_n^{(k)})_n$  soit uniforme au moins à partir d'un certain rang. En général, elle l'est à partir du rang 1 d'où l'énoncé suivant.

**Théorème 5 : Généralisation à la classe  $\mathcal{C}^\infty$** 

Soit  $(f_n)_n$  une suite de fonction de  $\mathbb{K}^I$ . On suppose que

H1

H2

H3

Alors

C1

C2

## II SÉRIES DE FONCTIONS

Les théorèmes sur les séries de fonctions se déduisent directement des théorèmes sur les suites de fonctions en les appliquant aux suites de sommes partielles.

### 1 Intégration sur un segment

#### Théorème 6 : Intersion série-intégrale sur un segment

Si  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $(f_n)_n$  une suite de fonction de  $\mathbb{K}^{[a,b]}$  tel que

H1

H2

alors

C1

C2

C3

Exercice 3 : CCINP 14

### 2 Primitive

#### Théorème 7 : Intersion série et primitive

Soient  $(f_n)_n$  une suite de fonction de  $\mathbb{K}^I$ ,  $a \in I$ . On suppose que

H1

H2

Alors on pose  $F_n : x \mapsto \int_a^x f_n(t) dt$  l'unique primitive de  $f_n$  qui s'annule en  $a$  et

C1

C2



### 3 Classe $\mathcal{C}^k$

#### Théorème 8 : Classe $\mathcal{C}^k$ d'une série de fonctions

Soit  $(f_n)_n$  une suite de fonction de  $\mathbb{K}^I$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$ . On suppose que

H1

H2

H3

Alors

C1

C2

C3

#### Théorème 9 : Classe $\mathcal{C}^\infty$ d'une série de fonctions

Soit  $(f_n)_n$  une suite de fonction de  $\mathbb{K}^I$ . On suppose que

H1

H2

H3

Alors

C1

C2

#### Exercice 4 : CCINP 16

#### Exercice 5

Pour  $n \in \mathbb{N}$  et  $x > 0$ , on pose  $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+x}$ .

Montrer que  $\sum f_n$  converge simplement vers  $f$  de classe  $\mathcal{C}^1$ .

Calculer  $f'$  et étudier les variations de  $f$ .

#### Exercice 6

1. Montrer que  $\zeta : x \in ]1, +\infty[ \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $]1, +\infty[$  et donner une expression de ses dérivées sous forme de somme.
2. Étudier la convexité de  $\zeta$ .
3. Montrer que  $\eta : x \in \mathbb{R}_*^+ \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$ .