

Régularité des suites et séries de fonctions

Extrait du programme officiel :

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

Intégration d'une limite uniforme sur un segment

Soit (u_n) une suite de fonctions continues définies sur un intervalle I de \mathbb{R} et à valeurs dans F , a un point de I . On suppose que (u_n) converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction u . Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in I$ soit

$$U_n(x) = \int_a^x u_n, \quad U(x) = \int_a^x u.$$

Alors (U_n) converge uniformément vers U sur tout segment de I .

En particulier, si (u_n) converge uniformément vers u sur le segment $[a, b]$, alors : $\int_a^b u_n \rightarrow \int_a^b u$.

Dérivation d'une suite de fonctions

Soit (u_n) une suite de fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur un intervalle I de \mathbb{R} , à valeurs dans F . Si (u_n) converge simplement sur I vers une fonction u , et si (u'_n) converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction v , alors (u_n) converge uniformément vers u sur tout segment de I , u est de classe \mathcal{C}^1 sur I et $u' = v$.

Extension aux suites de fonctions de classe \mathcal{C}^k , sous l'hypothèse de convergence simple de $(u_n^{(j)})$ pour $0 \leq j \leq k-1$ et de convergence uniforme sur tout segment de $(u_n^{(k)})$.

En pratique, on vérifie la convergence uniforme de (u'_n) sur des intervalles adaptés à la situation.

En pratique, on vérifie la convergence uniforme de $(u_n^{(k)})$ sur des intervalles adaptés à la situation.

Séries de fonctions

Adaptation au cas des séries de fonctions des résultats des paragraphes ci-dessus.

Exemples d'études de fonctions définies comme sommes de séries : régularité, étude asymptotique, utilisation de la comparaison série-intégrale.



Table des matières

11 Régularité des suites et séries de fonctions	1
I Suites de fonctions	2
1 Intégration sur un segment	2
2 Dérivation	5
II Séries de fonctions	6
1 Intégration sur un segment	7
2 Primitive	8
3 Classe \mathcal{C}^k	8

\mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} , I est un intervalle de \mathbb{R} contenant au moins deux points, X une partie non vide \mathbb{R} .

SUITES DE FONCTIONS

1 Intégration sur un segment

Théorème 1 : Interverson limite et intégrale

Si $a, b \in \mathbb{R}$, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ et $(f_n)_n$ une suite de fonction de $\mathbb{K}^{[a,b]}$ tel que

H1 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[a, b]$

H2 La suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur $[a, b]$

alors

C1 f est continue sur $[a, b]$

$$\mathbf{C2} \int_a^b f_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) dt.$$

Démonstration

On suppose $a \leq b$ quitte à multiplier par -1 .

$$\left| \int_a^b f_n(t) dt - \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f_n(t) - f(t)| dt \leq (b-a) \|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0. \quad \blacksquare$$



Méthode 1 : Pour montrer qu'on n'a pas convergence uniforme...

Il suffit qu'on n'ait pas $\int_a^b f_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) dt$.

Exercice 1 : CCINP 10

On pose $f_n(x) = (x^2 + 1) \frac{ne^x + xe^{-x}}{n+x}$.

- Démontrer que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[0, 1]$.
- Calculer la limite lorsque $n \rightarrow +\infty$ de $\int_0^1 (x^2 + 1) \frac{ne^x + xe^{-x}}{n+x} dx$.

Solution

- Pour $x \in [0, 1]$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = (x^2 + 1)e^x$.

La suite de fonctions (f_n) converge simplement vers $f : x \mapsto (x^2 + 1)e^x$ sur $[0, 1]$.

On a $\forall x \in [0, 1]$, $f_n(x) - f(x) = (x^2 + 1) \frac{x(e^{-x} - e^x)}{n+x}$, et donc : $\forall x \in [0, 1]$, $|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{2e}{n}$.

Ce majorant indépendant de x tend vers 0 quand $n \rightarrow +\infty$, donc la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers f sur $[0, 1]$.

- Par convergence uniforme sur le segment $[0, 1]$ de cette suite de fonctions continues sur $[0, 1]$, on peut intervertir limite et intégrale.

On a donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 (x^2 + 1) \frac{ne^x + xe^{-x}}{n+x} dx = \int_0^1 (x^2 + 1)e^x dx$.

Puis, en effectuant deux intégrations par parties, on trouve $\int_0^1 (x^2 + 1)e^x dx = 2e - 3$.

Exercice 2 : CCINP 48

$C^0([0, 1], \mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0, 1]$ à valeurs dans \mathbb{R} .

Soit $f \in C^0([0, 1], \mathbb{R})$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 t^n f(t) dt = 0$.

- Énoncer le théorème de Weierstrass d'approximation par des fonctions polynomiales.
- Soit (P_n) une suite de fonctions polynomiales convergeant uniformément sur le segment $[0, 1]$ vers f .
 - Montrer que la suite de fonctions $(P_n f)$ converge uniformément sur le segment $[0, 1]$ vers f^2 .

(b) Démontrer que $\int_0^1 f^2(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 P_n(t) f(t) dt$.

(c) Calculer $\int_0^1 P_n(t) f(t) dt$.

- En déduire que f est la fonction nulle sur le segment $[0, 1]$.

Solution

- Toute fonction f continue sur un segment $[a, b]$ et à valeurs réelles ou complexes est limite uniforme sur ce segment d'une suite de fonctions polynomiales.
- On pose : $\forall f \in C^0([0, 1], \mathbb{R})$, $N_\infty(f) = \sup_{t \in [0, 1]} |f(t)|$.



- (a) f et P_n étant continues sur $[0, 1]$,
 $\forall t \in [0, 1], |P_n(t)f(t) - f^2(t)| = |f(t)||P_n(t) - f(t)| \leq N_\infty(f)N_\infty(P_n - f)$.
 On en déduit que $N_\infty(P_n f - f^2) \leq N_\infty(f)N_\infty(P_n - f)$ (1)
 Or (P_n) converge uniformément vers f sur $[0, 1]$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} N_\infty(P_n - f) = 0$.
 Donc, d'après (1), $\lim_{n \rightarrow +\infty} N_\infty(P_n f - f^2) = 0$.
 Donc $(P_n f)$ converge uniformément sur $[0, 1]$ vers f^2 .
- (b) D'après la question précédente, $(P_n f)$ converge uniformément sur le segment $[0, 1]$ vers f^2 .
 De plus, $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_n f$ est continue sur $[0, 1]$.
 Donc, d'après le théorème d'intégration d'une limite uniforme de fonctions continues,
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 P_n(t)f(t) dt = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow +\infty} (P_n(t)f(t)) dt = \int_0^1 f^2(t) dt$.
- (c) $P \mapsto \int_0^1 P(t)f(t) dt$ et $P \mapsto 0$ sont linéaires et coïncident sur la base canonique de $\mathbb{R}[X]$ donc elles sont égales.
 Ainsi, $\int_0^1 P_n(t)f(t) dt = 0$.
3. D'après les questions 2.(b) et 2.(c), on a $\int_0^1 f^2(t) dt = 0$.
 Or f^2 est positive et continue sur $[0, 1]$, donc f^2 est nulle sur $[0, 1]$ et donc f est nulle sur $[0, 1]$.

Théorème 2 : Convergence uniforme de primitive

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ et $(f_n)_n$ une suite de fonction de \mathbb{K}^I , $a \in I$. On suppose que

H1 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur I .

H2 La suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur tout segment de I .

Alors on pose $F_n : x \mapsto \int_a^x f_n(t) dt$ l'unique primitive de f_n qui s'annule en a et

C1 f est continue sur I donc $F : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ unique primitive de f qui s'annule en a existe bien,

C2 $(F_n)_n$ converge uniformément vers F sur tout segment de I .

Démonstration

Sur un segment $[b, c]$ de I , on note $m = \min(a, b, c)$ et $M = \max(a, b, c)$. On calcule

$$|F_n(x) - F(x)| \leq |x - a| \|f_n - f\|_{\infty, [a, x]} \leq (M - m) \|f_n - f\|_{\infty, [m, M]} \rightarrow 0$$

d'où la conclusion. ■

Remarque

R1 – En fait, le premier théorème est une conséquence du second, en prenant $I = [a, b]$, on obtient bien $F_n(b) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} F(b)$.

2 Dérivation

Théorème 3 : Intersion limite et dérivée

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ et $(f_n)_n$ une suite de fonction de \mathbb{K}^I . On suppose que

H1 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n de classe \mathcal{C}^1 sur I .

H2 La suite $(f_n)_n$ converge simplement vers f sur I .

H3 La suite $(f'_n)_n$ converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction g .

Alors

C1 f est de classe \mathcal{C}^1 sur I .

C2 $f' = g$ c'est-à-dire « $(\lim f_n)' = \lim f'_n$ ».

C3 $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur tout segment de I .

Remarque

R2 – Vrai avec l'hypothèse plus faible de dérivabilité des f_n , mais hors-programme.

Démonstration

- Le théorème de transfert de continuité nous donne déjà la continuité de g sur I (avec **H1** et **H3**).

- Soit $a \in I$. On pose $F_n : x \mapsto \int_a^x f'_n(t) dt = f_n(x) - f_n(a)$ et $F : x \mapsto \int_a^x h(t) dt$. D'après le théorème précédent, (F_n) converge uniformément vers F sur tout segment de I , donc en particulier converge simplement vers F .

Or pour tout $x \in I$, $F_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x) - f(a)$, donc par unicité de la limite, pour tout $x \in I$,

$f(x) = f(a) + \int_a^x g(t) dt$ et ainsi f est de classe \mathcal{C}^1 et de dérivée g .

- Si S segment de I , $x \in S$,

$$|f_n(x) - f(x)| = |F_n(x) + f_n(a) - F(x) - f(a)| \leq |F_n(x) - F(x)| + |f_n(a) - f(a)| \leq \|F_n - F\|_{\infty, S} + |f_n(a) - f(a)|$$

qui est indépendant de x et converge vers 0. Donc $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur tout segment de I . ■

**Théorème 4 : Généralisation à la classe \mathcal{C}^k**

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonction de \mathbb{K}^I , $p \in \mathbb{N}^*$. On suppose que

H1 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n de classe \mathcal{C}^k sur I .

H2 Pour tout $j \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket$, la suite $(f_n^{(j)})_n$ converge simplement vers une fonction g_j sur I .

H3 La suite $(f_n^{(k)})_n$ converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction g_k .

Alors

C1 $f = g_0$ est de classe \mathcal{C}^k sur I .

C2 Pour tout $j \in \llbracket 0, k \rrbracket$, $f^{(j)} = g_j$ c'est-à-dire « $(\lim f_n)^{(j)} = \lim f_n^{(j)}$ ».

C3 Pour tout $j \in \llbracket 0, k \rrbracket$, $(f_n^{(j)})_n$ converge uniformément sur tout segment de I .

Démonstration

On applique le théorème précédent à toutes les dérivées successives, de la n° k à la n° 1.

Remarque

R3 – Pour obtenir une classe \mathcal{C}^∞ , il suffit que les f_n le soit et que la convergence des $(f_n^{(k)})_n$ soit uniforme au moins à partir d'un certain rang. En général, elle l'est à partir du rang 1 d'où l'énoncé suivant.

Théorème 5 : Généralisation à la classe \mathcal{C}^∞

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonction de \mathbb{K}^I . On suppose que

H1 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n de classe \mathcal{C}^∞ sur I .

H2 La suite $(f_n)_n$ converge simplement vers une fonction f sur I .

H3 Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la suite $(f_n^{(k)})_n$ converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction g_k .

Alors

C1 f est de classe \mathcal{C}^∞ sur I .

C2 Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $f^{(k)} = g_k$ c'est-à-dire $(\lim f_n)^{(k)} = \lim f_n^{(k)}$.

II SÉRIES DE FONCTIONS

Les théorèmes sur les séries de fonctions se déduisent directement des théorèmes sur les suites de fonctions en les appliquant aux suites de sommes partielles.

1 Intégration sur un segment

Théorème 6 : Intersion série-intégrale sur un segment

Si $a, b \in \mathbb{R}$, $(f_n)_n$ une suite de fonction de $\mathbb{K}^{[a,b]}$ tel que

H1 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[a, b]$.

H2 La série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément vers f sur $[a, b]$

alors

C1 $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur $[a, b]$.

C2 $\sum \int_a^b f_n(t) dt$ converge.

C3 $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t) dt = \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) dt$.

Exercice 3 : CCINP 14

1. Soit a et b deux réels donnés avec $a < b$.

Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur $[a, b]$, à valeurs réelles.

Démontrer que si la suite (f_n) converge uniformément sur $[a, b]$ vers f , alors la suite

$\left(\int_a^b f_n(x) dx \right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\int_a^b f(x) dx$.

2. Justifier comment ce résultat peut être utilisé dans le cas des séries de fonctions.

3. Démontrer que $\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \right) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n}$.

Corrigé

La série $\sum x^n$ converge normalement et donc uniformément sur le segment $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.

De plus, $\forall n \in \mathbb{N}$, $x \mapsto x^n$ est continue sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.

On en déduit alors que $\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \right) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\frac{1}{2}} x^n dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1} \frac{1}{2^{n+1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \frac{1}{2^n}$.

Exercice 4

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x \in [0, 1]$, $f_n(x) = (-1)^n x^n (1-x)^2$.

Montrer que $\sum f_n$ converge normalement sur $[0, 1]$ puis déterminer $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$.

En déduire la valeur de $S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)(n+2)(n+3)}$.

Réponse : $2 \ln 2 - \frac{5}{4}$.



2 Primitive

Théorème 7 : Intersion série et primitive

Soient $(f_n)_n$ une suite de fonction de \mathbb{K}^I , $a \in I$. On suppose que

H1 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur I .

H2 La série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément vers $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ sur tout segment de I .

Alors on pose $F_n : x \mapsto \int_a^x f_n(t) dt$ l'unique primitive de f_n qui s'annule en a et

C1 f est continue sur I donc $F : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ unique primitive de f qui s'annule en a existe bien,

C2 La série de fonctions $\sum F_n$ converge uniformément sur tout segment de I et

$$F = \sum_{n=0}^{+\infty} F_n.$$

3 Classe \mathcal{C}^k

Théorème 8 : Classe \mathcal{C}^k d'une série de fonctions

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonction de \mathbb{K}^I , $k \in \mathbb{N}^*$. On suppose que

H1 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n de classe \mathcal{C}^k sur I .

H2 Pour tout $j \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket$, la série de fonctions $\sum f_n^{(j)}$ converge simplement sur I .

H3 La série de fonctions $\sum f_n^{(k)}$ converge uniformément sur tout segment de I .

Alors

C1 $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe \mathcal{C}^k sur I .

C2 Pour tout $j \in \llbracket 0, k \rrbracket$, $f^{(j)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(j)}$.

C3 Pour tout $j \in \llbracket 0, k \rrbracket$, $\sum f_n^{(j)}$ converge uniformément sur tout segment de I .

Exercice 5 : CCINP 16

On considère la série de fonctions de terme général u_n définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0, 1], u_n(x) = \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}.$$

On pose, lorsque la série converge,

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n} \right].$$

1. Démontrer que S est définie sur $[0, 1]$.

2. On définit une suite $(u_n)_{n \geq 1}$ par $u_n = \ln(n+1) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

En utilisant $S(1)$ montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est convergente.

En déduire un équivalent simple de $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

3. Démontrer que S est de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, 1]$ et calculer $S'(1)$.

1. On a, pour tout $x \in]0, 1[$, $-u_n(x) \sim \frac{x^2}{n^2}$ terme général positif de série convergente, donc, par comparaison, $\sum u_n(x)$ converge.

C'est aussi le cas pour $x = 0$ car $u_n(0) = 0$.

Donc S est bien définie sur $[0, 1]$.

2. Comme $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} = \ln(n+1) - \ln n - \frac{1}{n}$, u_n est la somme partielle d'ordre n de la série précédente pour $x = 1$, donc $u_n \rightarrow S(1)$.

$$\text{Ainsi } \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \mathcal{O}(1) = \ln n + o(\ln n) \sim \ln n.$$

3. Soit $x \in [0, 1]$.

Si $x = 0$, $u_n(0) = 0$ et donc $\sum u_n(0)$ converge.

Si $x \neq 0$, comme au voisinage de $+\infty$, $u_n(x) = -\frac{x^2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, alors $|u_n(x)| \sim \frac{x^2}{2n^2}$.

Or $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge donc, par critère de comparaison des séries à termes positifs, $\sum u_n(x)$ converge absolument, donc converge.

On en déduit que la série des fonctions u_n converge simplement sur $[0, 1]$.

La fonction S est donc définie sur $[0, 1]$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } [0, 1] \text{ et } \forall x \in [0, 1], u'_n(x) = \frac{1}{x+n} - \frac{1}{n} = \frac{-x}{n(x+n)}.$$

$$\text{Donc } \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0, 1], |u'_n(x)| \leq \frac{1}{n^2}.$$

$$\text{On en déduit que } \|u'_n\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} |u'_n(x)| \leq \frac{1}{n^2}.$$

Or $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge.

Donc $\sum_{n \geq 1} u'_n$ converge normalement, donc uniformément sur $[0, 1]$.

On peut alors affirmer que la fonction S est de classe \mathcal{C}^1 .

$$\text{Et on a : } \forall x \in [0, 1], S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u'_n(x).$$

$$\text{En vertu de ce qui précède, } S'(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} u'_n(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \right).$$

$$\text{Or } \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{N+1} - 1 \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} -1.$$

Donc $S'(1) = -1$.

**Exercice 6**

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x > 0$, on pose $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+x}$.

Montrer que $\sum f_n$ converge simplement vers f de classe \mathcal{C}^1 .

Calculer f' et étudier les variations de f .

Théorème 9 : Classe \mathcal{C}^∞ d'une série de fonctions

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonction de \mathbb{K}^I . On suppose que

H1 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n de classe \mathcal{C}^∞ sur I .

H2 La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur I .

H3 Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la série de fonctions $\sum f_n^{(k)}$ converge uniformément sur tout segment de I .

Alors

C1 $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur I .

C2 Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^{(k)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(k)}$.

Exercice 7

1. Montrer que $\zeta : x \in]1, +\infty[\mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur $]1, +\infty[$ et donner une expression de ses dérivées sous forme de somme.

2. Étudier la convexité de ζ .

3. Montrer que $\eta : x \in \mathbb{R}_*^+ \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}$ est de classe \mathcal{C}^∞ .