

Savoir-faire et thèmes classiques – Fonctions numériques – MP2I

1 Continuité, dérivabilité

Savoir-faire

- Traduire une limite avec des quantificateurs
- Montrer une convergence vers une limite en majorant la norme de la différence par une suite tendant vers 0
- Écrire et manipuler des relations de comparaison o , \mathcal{O} ou \sim entre fonctions numériques
- Traduire la continuité et l'uniforme continuité et leurs caractérisations séquentielles
- Utiliser le théorème des valeurs intermédiaires et ses extensions (avec des limites) Exemple : problèmes de point fixe
- Utiliser le théorème des bornes atteinte (étendu aux compacts)
- Utiliser le théorème de la bijection
- Utiliser le théorème de Heine
- Traduire une lipschitzianité
- Montrer que deux applications continues sont égales car elles coïncident sur une partie dense
- Traduire une dérivabilité à l'aide d'un taux d'accroissement ou d'un DL_1
- Dériver les fonctions usuelles (une ou plusieurs fois)
- Effectuer une étude de fonction pour montrer une inégalité, déterminer des extrema, calculer une norme infini, montrer une bijectivité, etc.
- Étudier la dérivabilité de la réciproque d'une bijection
- Calculer des dérivées successives, utiliser la formule de Leibniz
- Utiliser la condition nécessaire d'extremum local, le théorème de Rolle, le théorème des accroissements finis, l'inégalité des accroissements finis, le théorème de la limite de la dérivée
- Utiliser le principe de la démonstration du théorème des accroissements finis

Thèmes Classiques

- Un polynôme réel de degré impair admet une racine réelle
- Résoudre l'équation fonctionnelle

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

avec f continue en 0

- Théorème du point fixe d'une fonction continue sur un intervalle stable
- Utilisation du théorème de Rolle pour l'étude des dérivées de polynômes réels simplement scindés ou scindés
- Utilisation du théorème de Rolle pour montrer que les polynômes de Legendre sont simplement scindés
- Généralisations du théorème de Rolle
- Majoration de l'erreur dans l'interpolation de Lagrange
- Égalité de Taylor-Lagrange
- Théorème de Darboux

2 Convexité

Savoir-faire

- Définir et donner toutes les caractérisations (cordes, épigraphe, inégalité des trois cordes, taux d'accroissement, dérivée première, dérivée seconde) de la convexité
- Utiliser l'inégalité de Jensen
- Reconnaître une inégalité de convexité sous forme de somme ou de produit

Thèmes Classiques

- Inégalité arithmético-géométrique
- Théorème de Gauß-Lucas
- Inégalité de Jensen continue
- Point de continuité, de dérivabilité à gauche ou à droite d'une fonction convexe



3 Intégration sur un segment

Savoir-faire

- Majorer la norme d'une intégrale sur un segment
- Utiliser la positivité améliorée
- Utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour les intégrales et son cas d'égalité
- Reconnaître des sommes de Riemann et traduire leur convergence
- Utiliser le théorème fondamental de l'analyse
- Étudier une fonction intégrale dépendant de ses bornes en introduisant une primitive
- Effectuer une intégration par parties et un changement de variables
- Calculer une primitive directement, par IPP, par CV, par DES d'une fraction rationnelle, en utilisant les règles de Bioche, en les appliquant aux fonctions hyperboliques, en trouvant un bon CV lorsqu'il y a des racines
- Énoncer précisément les trois formules de Taylor avec leurs hypothèses

Thèmes Classiques

- Étude complète des intégrales de Wallis
- Lemme de Riemann-Lebesgue