10

Fonctions numériques
Continuité, continuité uniforme, dérivabilité, convexité, intégration sur un segment (MP2I)

Dans tout le chapitre, I désigne un intervalle réel contenant au moins deux points, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Continuité

1 Définition

Définition 1 : Continuité

Soit $f : I \to \mathbb{K}$, $a \in I$.

f est dite continue en a si et seulement si $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} f(a)$, si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I,\ |x-a| \leqslant \eta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon.$$

Soit $f : I \to \mathbb{K}$. f est dite **continue sur** I lorsque f est continue en tout point de I.

On note $\mathscr{C}(I,\mathbb{R})$ ou $\mathscr{C}(I)$ ou $\mathscr{C}^0(I,\mathbb{R})$ ou $\mathscr{C}^0(I)$ l'ensemble de telles fonctions.

Propriété 1 : Caractérisations séquentielles

(i) f est continue en a

$\Longleftrightarrow (ii)\ \forall (a_n) \in I^{\mathbb{N}} \mid a_n \to a,\ f(a_n) \to f(a).$

$\Longleftrightarrow (iii)\ \forall (a_n) \in I^{\mathbb{N}} \mid a_n \to a,\ (f(a_n))$ *converge.*

2 Cas des fonctions à valeurs réelles

Dans ce paragraphe, toutes les fonctions sont à valeurs réelles.

Théorème 1 : des valeurs intermédiaires

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue. Si $a, b \in I$ tels que $a < b$ et $m \in [f(a), f(b)]$, alors il existe $c \in [a,b]$ tel que $m = f(c)$. Autrement dit,

$$[f(a), f(b)] \subset f([a,b]).$$

Extension : Si $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ tels que $a < b$, $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ continue sur $]a,b[$ et admet des limites $\lim\limits_{a^+} f$ à droite de a et $\lim\limits_{b^-} f$ à gauche de b, alors pour tout $m \in \left]\lim\limits_{a^+} f, \lim\limits_{b^-} f\right[$, on a $c \in]a,b[$ tel que $f(c) = m$. Autrement dit,

$$\left]\lim_{a^+} f, \lim_{b^-} f\right[\subset f(]a,b[).$$

Corollaire 1 : Image continue d'un intervalle

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Autrement dit, si f est continue sur un intervalle I, alors $f(I)$ est un intervalle.

Théorème 2 : des bornes atteintes

Une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.

Ainsi, si $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et si f est continue sur le segment $[a,b]$, alors on a $c, d \in [a,b]$ tels que $f(c) = \min\limits_{[a,b]} f$ et $f(d) = \max\limits_{[a,b]} f$.

Corollaire 2 : Image continue d'un segment

L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.

Avec les notations précédentes, f étant continue sur $[a,b]$,

$$f([a,b]) = \left[\min_{[a,b]} f, \max_{[a,b]} f\right] = [f(c), f(d)]$$

Propriété 2 : Stricte monotonie d'une fonction continue injective sur un intervalle

Si f est continue et injective sur un intervalle I, f est strictement monotone sur I.

Théorème 3 : de la bijection

Soit I un intervalle et f définie au moins sur I, à valeurs réelles. On suppose que

H1 *f est continue sur I.*

H2 *f est strictement monotone sur I.*

Alors

C1 *f induit une bijection $\tilde{f}$ de I sur $J = f(I)$.*

C2 *$\tilde{f}^{-1}$ est strictement monotone de même monotonie que f.*

C3 *$\tilde{f}^{-1}$ est continue sur J.*

Définition 2 : Homéomorphisme (HP)

$f : I \to J$ est appelé **homéomorphisme** lorsque f est bijective et bicontinue, c'est-à-dire f continue sur I et f^{-1} est continue sur J.

Le « théorème de la bijection » se reformule alors en

Théorème 4 : Théorème de l'homéomorphisme

Toute fonction continue strictement monotone induit de I sur $J = f(I)$ un homéomorphisme.

3 Uniforme continuité

La continuité dont on a parlé jusqu'à maintenant était une propriété locale : au voisinage d'un point a, si je me reproche de a, alors mon image par f se rapproche de $f(a)$, ce qui s'écrit formellement :

$$\forall a \in I,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I,\ |x-a| \leqslant \eta \Longrightarrow \left|f(x) - f(a)\right| \leqslant \varepsilon$$

Définition 3 : Uniforme continuité

Soit $f : I \to \mathbb{K}$. On dit que f est **uniformément continue** sur I si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x, y \in I,\ \left|x - y\right| \leqslant \eta \Longrightarrow \left|f(x) - f(y)\right| \leqslant \varepsilon$$

Cela impose que si x et y sont suffisamment proches, mais n'importe où dans I, alors $f(x)$ et $f(y)$ sont proches également.

Ainsi, pour des fonctions à trop grandes variations, on pourra ne pas avoir uniforme continuité.

Propriété 3 : UC ⇒ Continue

Une fonction uniformément continue sur I est continue sur I. Réciproque fausse.

Propriété 4 : Caractérisation séquentielle

f est uniformément continue sur I si et seulement si

$$\forall (x_n)_n, (y_n)_n \in I^{\mathbb{N}} \mid x_n - y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,\ f(x_n) - f(y_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Propriété 5 : Stabilités

Une combinaison linéaire, une composée de fonctions uniformément continue l'est encore.

⚠ Faux pour un produit ou un quotient.

Théorème 5 : de Heine

*Tout fonction continue sur un **segment** est uniformément continue sur ce segment.*

4 Application au théorème d'approximation uniforme par des fonctions en escalier

On redonne la définition d'une fonction continue par morceaux et on utilise le théorème de Heine pour démontrer le théorème d'approximation uniforme par des fonctions en escalier, résultat à la base de la construction de l'intégrale de Riemann sur un segment.

Définition 4 : Fonctions continues par morceaux

Une application $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ est dite **continue par morceaux** si et seulement s'il existe une subdivision $\sigma = (a_0, a_1, \dots, a_n)$ de $[a,b]$ (avec $a_0 = a < a_1 < \cdots < a_n = b$, donc) telle que

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ \begin{cases} f_{|]a_k, a_{k+1}[} \text{ est continue.} \\ f \text{ admet des limites à droite} \\ \text{de } a_k \text{ et à gauche de } a_{k+1}. \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ \begin{cases} f_{|]a_k, a_{k+1}[} \text{ est continue.} \\ f_{|]a_k, a_{k+1}[} \text{ est prolongeable par} \\ \text{continuité à } [a_k, a_{k+1}]. \end{cases}$$

On dit alors que σ est **adaptée** à f.

On note $\mathscr{C}_m([a,b])$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$.

$f : I \to \mathbb{K}$ est dite continue par morceaux (sur I) si sa restriction à tout segment l'est.

Théorème 6 : Approximation uniforme des fonctions CPM sur un segment par des fonctions en escalier

Toute fonction continue par morceaux sur un segment est limite uniforme sur ce segment d'une suite de fonctions en escalier.

5 Fonctions lipschitziennes

Définition 5 : Fonction lipschitzienne

$f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite k-lipschitzienne sur X (où $k \in \mathbb{R}_+^*$) si

$$\forall x, y \in X,\ \left|f(x) - f(y)\right| \leqslant k\left|x - y\right|.$$

Propriété 6 : Lipschitzienne ⇒ UC

Toute fonction lipschitzienne (ou plus généralement höldérienne) sur I y est uniformément continue. La réciproque est fausse.

II Dérivabilité

1 Nombre dérivé et fonction dérivée

a Dérivabilité en un point, sur un intervalle

Définition 6 : Nombre dérivé, fonction dérivée

Soit $f : I \to \mathbb{K}$, $a \in I$. On dit que f **est dérivable en** a si et seulement si $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ a une limite lorsque $x \to a$ si et seulement si $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ a une limite lorsque $h \to 0$.

Cette limite est alors notée $f'(a)$ ou $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a)$ et appelée **nombre dérivé de** f **en** a.

Lorsqu'elle existe, on a donc

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

f est dérivable sur I si et seulement si f est dérivable en tout point de I.

On définit alors la fonction dérivée

$$f' = \mathrm{D}f = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} : \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f'(x) \end{array} \right. .$$

Propriété 7 : DL$_1$

f est dérivable en a si et seulement si elle admet un développement limité à l'ordre 1 en a, c'est-à-dire si on peut écrire

$$f(a+h) = f(a) + hb + h\cdot\varepsilon(h) = f(a) + hb + \mathrm{o}(h)$$

où $b \in \mathbb{K}$ et $\varepsilon(h) \xrightarrow[h\to 0]{} 0$.

Dans ce cas, $b = f'(a)$.

Corollaire 3 : dérivable $\implies$ continue

Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.

La réciproque est fausse.

Définition 7 : Dérivabilité à gauche, à droite

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in I$. f est dite **dérivable à gauche** (respectivement **à droite**) de a lorsque $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite à gauche (respectivement à droite) de a, notée $f'_g(a)$ (respectivement $f'_d(a)$).

Propriété 8 : Caractérisation de la dérivabilité

Si $a \in \mathring{I}$, f est dérivable en a si et seulement si f est dérivable à gauche et à droite de a et $f'_g(a) = f'_d(a)$.

On a alors $f'_g(a) = f'_d(a) = f'(a)$

b Opérations algébriques

Propriété 9 : Opérations algébriques

Si $f, g : I \to \mathbb{R}$, $a \in I$, $\lambda \in \mathbb{R}$

(i) *$f+g$ dérivable en a et $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$.*

(ii) *$f \times g$ dérivable en a et*

$$(f\times g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a).$$

(iii) *λf dérivable en a et $(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a)$.*

(iv) *Si g ne s'annule pas, $\frac{f}{g}$ est dérivable en a et*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}.$$

Propriété 10 : Composée

Soient I, J sont des intervalles, $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ tel que $f(I) \subset J$ et $a \in I$.

Si f est dérivable en a et g est dérivable en $b = f(a)$, alors $g\circ f$ est dérivable en a et

$$(g\circ f)'(a) = f'(a) \times g'\circ f(a).$$

c Dérivée d'une réciproque

Propriété 11 : Dérivée d'une réciproque

Si $f : I \to J$ bijective et dérivable sur I, alors f^{-1} est dérivable sur $\{f(x)\ ;\ x \in I \text{ et } f'(x) \neq 0\}$ et

$$\left(f^{-1}\right)' = \frac{1}{f'\circ f^{-1}}$$

2 Dérivées successives et classe d'une fonction

Définition 8 : Dérivées successives et classe d'une fonction

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.

- Lorsque f est dérivable n fois, note $f^{(n)}$ sa dérivée ne tel que $f^{(0)} = f$ et pour tout k, $f^{(k+1)} = \left(f^{(k)}\right)'$.
- Si $k \in \mathbb{N}$, f est **de classe** $\mathscr{C}^k$ **sur** I lorsque f est k fois dérivable et $f^{(k)}$ est continue sur I. On note $\mathscr{C}^k(I)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^k$ sur I.
- f est **de classe** $\mathscr{C}^\infty$ **sur** I lorsque f est de classe $\mathscr{C}^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire lorsque f est indéfiniment dérivable.

Propriété 12 : Classe d'une dérivée

Si $n \geqslant 1$, f est n fois dérivable (respectivement de classe $\mathscr{C}^n$) si et seulement si f dérivable et f' est $n-1$ fois dérivable (respectivement de classe $\mathscr{C}^{n-1}$). Alors $f^n = (f')^{(n-1)}$.

Propriété 13 : Opérations sur les dérivée d'ordre n

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ n fois dérivable (respectivement de classe $\mathscr{C}^n$) sur I, $\lambda \in \mathbb{R}$.

(i) *$f+g$ est n fois dérivable (respectivement de classe $\mathscr{C}^n$) sur I et*

$$(f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}.$$

(ii) *λf est n fois dérivable (respectivement de classe $\mathscr{C}^n$) sur I et*

$$(\lambda f)^{(n)} = \lambda f^{(n)}.$$

(iii) ***Formule de Leibniz***

$f \times g$ est n fois dérivable (respectivement de classe $\mathscr{C}^n$) sur I et

$$(f \times g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

(iv) *Si g ne s'annule pas sur I, $\dfrac{f}{g}$ est n fois dérivable (respectivement de classe $\mathscr{C}^n$) sur I.*

(v) *Si $h : J \to \mathbb{R}$, tel que $f(I) \subset J$ est n fois dérivable (respectivement de classe $\mathscr{C}^n$) sur J, $f \circ g$ est n fois dérivable (respectivement de classe $\mathscr{C}^n$) sur I.*

Propriété 14 : Fonctions usuelles

Les fonctions usuelles $\exp$, $\sin$, $\cos$, $\tan$, $\ln$, ch, sh, th, Arctan et polynomiales ou rationnelles sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur leur ensemble de définition.

Les fonctions Arcsin et Arccos sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1,1[$.

$\sqrt{\cdot}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Définition 9 : $\mathscr{C}^k$-difféomorphismes (HP)

$f : I \to J$ est un **$\mathscr{C}^k$-difféomorphisme** lorsque

- f est bijective,
- f est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I,
- f^{-1} est de classe $\mathscr{C}^k$ sur J.

Propriété 15 : Caractérisation (HP)

Soit $f : I \to J$ bijective de classe $\mathscr{C}^k$ avec $k \geqslant 1$.

Alors f est un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme (ie f^{-1} est de classe $\mathscr{C}^k$ sur J) si et seulement si f' ne s'annule pas sur I.

3 Applications

a Condition nécessaire d'extremum local

Définition 10 : Extremum local

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in I$.

(i) On dit que f admet **un minimum** (respectivement **maximum**) **local** en a lorsqu'il existe un voisinage V de a tel que $\forall x \in I \cap V,\quad f(x) \geqslant f(a)$ (resp. $f(x) \leqslant f(a)$).

(ii) On dit que f admet **un minimum** (respectivement **maximum**) **local strict** en a lorsqu'il existe un voisinage V de a tel que $\forall x \in (I \cap V) \setminus \{a\},\quad f(x) > f(a)$ (resp. $f(x) < f(a)$).

On parle alors d'**extremum local**.

Lorsque $V = \mathbb{R}$, on parle d'**extremum global**.

Définition 11 : point critique

Si $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in \mathring{I}$ tel que f dérivable en a. On dit que a est un **point critique** de f lorsque $f'(a) = 0$.

Propriété 16 : Condition nécessaire d'extremum local

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in I$ tel que

H1 $a \in \mathring{I}$

H2 *f est dérivable en a*

H3 *f admet un extremum local en a*

Alors a est un pont critique de f : $f'(a) = 0$.

La réciproque est fausse.

b Théorème de Rolle

Théorème 7 : Théorème de Rolle

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Si

H1 *f est continue sur $[a,b]$*

H2 *f est dérivable sur $]a,b[$*

H3 $f(a) = f(b)$

Alors $\exists c \in]a,b[,\quad f'(c) = 0$.

c Théorème des accroissements finis

Théorème 8 : Théorème des accroissements finis

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Si

H1 *f est continue sur $[a,b]$*

H2 *f est dérivable sur $]a,b[$*

Alors $\exists c \in]a,b[,\quad f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ ie

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(c).$$

d Inégalité des accroissements finis

Théorème 9 : Inégalité des accroissements finis

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Si

H1 *f est continue sur $[a,b]$*

H2 *f est dérivable sur $]a,b[$*

H3 $\exists m, M \in \mathbb{R},\quad \forall x \in]a,b[,\quad m \leqslant f'(x) \leqslant M$

Alors $m(b-a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant M(b-a)$.

Corollaire 4 : 2e version

Soit $f : I \to \mathbb{K}$. Si

H1 *f est continue sur I*

H2 *f est dérivable sur $\mathring{I}$*

H3 $\exists k \in \mathbb{R},\quad \forall x \in \mathring{I},\quad |f'(x)| \leqslant k$

Alors f est k-lipschitzienne sur I, c'est-à-dire

$$\forall x, y \in I,\quad |f(x) - f(y)| \leqslant k|x - y|.$$

e Variation des fonctions dérivables

Théorème 10 : Variation des fonctions dérivables

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, continue sur I, dérivable sur $\mathring{I}$.

(i) *f est constante sur I si et seulement si $f' \equiv 0$ sur $\mathring{I}$.*

(ii) *f est croissante (respectivement décroissante) sur I si et seulement si $f' \geqslant 0$ (respectivement $f' \leqslant 0$) sur $\mathring{I}$.*

(iii) *f est strictement croissante (respectivement décroissante) sur I si et seulement si $f' \geqslant 0$ (respectivement $f' \leqslant 0$) sur $\mathring{I}$ et $\left\{x \in \mathring{I} \mid f'(x) = 0\right\}$ ne contient aucun intervalle d'intérieur non vide ie f' ne s'annule qu'en des points isolés.*

f Théorème de la limite de la dérivée

Théorème 11 : Théorème de la limite de la dérivée

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in I$ tel que

H1 *f est dérivable sur $I \setminus \{a\}$*

H2 *f est continue en a*

H3 $f'(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell \in \overline{\mathbb{R}}$

Alors $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \xrightarrow[x \to a]{} \ell$.

Donc

- *soit $\ell = \pm\infty$ et $\mathscr{C}_f$ admet une tangente verticale en a,*
- *soit $\ell \in \mathbb{R}$ et f est dérivable en a, $f'(a) = \ell$ et f' est continue en a.*

Théorème 12 : du prolongement $\mathscr{C}^k$ (HP)

Soit $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, et $f \in \mathscr{C}^k(I \setminus \{a\})$ telle que $\forall i \in [\![0, k]\!]$, $f^{(i)}$ a une limite finie en a. Alors le prolongement de f par continuité en a est une fonction de classe $\mathscr{C}^k$ sur I.

III Fonctions convexes d'une variable réelle

1 Définitions

Définition 12 : Fonction convexe, concave

- $f : I \to \mathbb{R}$ est dite **convexe** sur I lorsque

$$\forall x, y \in I,\quad \forall t \in [0,1],\quad f\big((1-t)x + ty\big) \leqslant (1-t)f(x) + tf(y)$$

- f est dite **concave** sur I lorsque $-f$ est convexe.

Propriété 17 : Caractérisation par interprétation géométrique

f est convexe (respectivement concave) si et seulement si tout sous-arc de sa courbe est situé en dessous (respectivement au-dessus) de la corde correspondante.

Définition 13 : Épigraphe

La partie $\mathscr{E}(f)$ du plan située au dessus (au sens large) de la courbe de f s'appelle son **épigraphe**.

$$(x, y) \in \mathscr{E}(f) \Longleftrightarrow y \geqslant f(x)$$

2 Caractérisations

Ces caractérisations sont à visualiser sur des dessins !

Propriété 18 : Caractérisation avec l'épigraphe

f est convexe sur I si et seulement si son épigraphe $\mathscr{E}(f)$ est une partie convexe de $\mathbb{R}^2$.

Propriété 19 : Caractérisations avec les pentes des cordes

Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) *f est convexe sur I.*

(ii) ***Inégalité des trois cordes*** : si $x, y, z \in I$, $x < y < z$,

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leqslant \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leqslant \frac{f(z) - f(y)}{z - y}$$

(iii) ***Croissance des pentes*** : *pour tout $a \in I$,*

$$\tau_a : \left| \begin{array}{ccc} I \setminus \{a\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \end{array} \right. \quad \text{est croissante}$$

3 Cas des fonctions dérivables

Propriété 20 : Caractérisation avec la dérivée

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur I.

f est convexe si et seulement si f' est croissante sur I

Corollaire 5 : Caractérisation avec la dérivée seconde

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable sur I.

f est convexe (respectivement concave) si et seulement si $f'' \geqslant 0$ (respectivement $f'' \leqslant 0$) sur I.

Propriété 21 : Caractérisation avec les tangentes

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur I.

f est convexe (respectivement concave) si et seulement si son graphe est au-dessus (respectivement au dessous) de toutes ses tangentes.

4 Inégalités de convexité

Propriété 22 : Inégalité de Jensen

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $n \geqslant 1$, $(x_1, \dots, x_n) \in I^n$, $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in [0,1]^n$ tel que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$.

- *Si f est convexe, $f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$.*

  En particulier,

$$f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i).$$

- *Si f est concave, $f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \geqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$.*

  En particulier,

$$f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \geqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i).$$

IV Intégration sur un segment d'une fonction continue par morceaux

1 Définition et propriétés

L'idée de la construction de l'intégrale d'une fonction continue par morceau consiste à commencer par définir celle de fonctions en escalier (somme des aires des rectangles) puis grâce au fait que toute fonction continue par morceaux est limite uniforme d'une suite de fonctions en escalier, d'en déduire que si $f \in \mathscr{C}_m([a,b],\mathbb{R})$, $\left\{\int_{[a,b]} \varphi \; ; \; \varphi \in \mathscr{E}([a,b]), \varphi \leqslant f\right\}$ et $\left\{\int_{[a,b]} \psi \; ; \; \psi \in \mathscr{E}([a,b]), \psi \geqslant f\right\}$ admettent respectivement une borne supérieure et inférieure, égales. On a alors la définition :

Définition 14 : Intégrale d'une fonction continue par morceaux

Soit $f \in \mathscr{C}_m([a,b],\mathbb{R})$. On définit

$$\int_{[a,b]} f = \sup_{\substack{\varphi \in \mathscr{E}([a,b]) \\ \varphi \leqslant f}} \int_{[a,b]} \varphi = \inf_{\substack{\psi \in \mathscr{E}([a,b]) \\ \psi \geqslant f}} \int_{[a,b]} \psi.$$

Soit $f \in \mathscr{C}_m([a,b],\mathbb{C})$. Alors $\mathfrak{Re}\, f \in \mathscr{C}_m([a,b],\mathbb{R})$, $\operatorname{Im} f \in \mathscr{C}_m([a,b],\mathbb{R})$ et on pose

$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} \mathfrak{Re}\, f + \mathrm{i} \int_{[a,b]} \mathfrak{Im}\, f$$

La première définition a un intérêt uniquement théorique.

Notation 1

Pour $f \in \mathscr{C}_m([a,b])$, on note $\int_a^b f = \int_{[a,b]} f$, $\int_b^a f = -\int_a^b f = -\int_{[a,b]} f$ et $\int_a^a f = 0$.

On note aussi $\int_a^b f = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Propriété 23 : de l'intégrale sur un segment d'une fonction CPM

Si I intervalle, $a, b \in I$ (non nécessairement ordonnés).

(i) $\begin{array}{|ccc} \mathscr{C}_m(I) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ f & \longmapsto & \int_a^b f \end{array}$ *est linéaire.*

(ii) Si $a \leqslant b$, $f \leqslant g \Longrightarrow \int_a^b f \leqslant \int_a^b g$.

Si $b \leqslant a$, $f \leqslant g \Longrightarrow \int_a^b f \geqslant \int_a^b g$.

(iii) ⚠ En général, si $a, b \in I$ et $f \in \mathscr{C}_m(I)$,

$$\left|\int_a^b f\right| \leqslant \left|\int_a^b |f|\right|$$

(iv) Si $a, b, c \in I$ et $f \in \mathscr{C}_m(I)$, $\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f$.

Propriété 24 : Positivité améliorée (appellation non officielle)

*Si f est **continue** sur $[a,b]$ et **de signe constant**,*

$$\int_a^b f = 0 \Longleftrightarrow f \equiv 0 \text{ sur } [a,b]$$

C'est faux si f est seulement continue par morceaux.

Propriété 25 : Inégalité de Cauchy-Schwarz

Si $f, g \in \mathscr{C}([a,b], \mathbb{R})$,

$$\left(\int_a^b fg\right)^2 \leqslant \int_a^b f^2 \int_a^b g^2$$

avec égalité si et seulement si (f,g) est liée.

2 Sommes de Riemann

Définition 15 : Sommes de Riemann

Soit $f \in \mathscr{C}_m([a,b])$, $\sigma = (a_0, \dots, a_n)$ subdivision de $[a,b]$ et pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, $\xi_k \in [a_k, a_{k+1}]$. On appelle **somme de Riemann associée à f, σ et $(\xi_k)_k$** :

$$S(f,\sigma,\xi) = \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) f(\xi_k)$$

Théorème 13 : Convergence des sommes de Riemann

Soit $f \in \mathscr{C}_m([a,b])$.

(i) $h(\sigma)$ désignant le pas de σ,

$$S(f,\sigma,\xi) \xrightarrow[h(\sigma)\to 0]{} \int_a^b f.$$

(ii) Si, de plus, f est K-lipschitzienne,

$$\left| S(f,\sigma,\xi) - \int_a^b f \right| \leqslant K(b-a)h(\sigma).$$

Corollaire 6 : Cas simples

Si f est continue par morceaux sur $[a,b]$, $a < b$,

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f.$$

En particulier, si $a = 0$ et $b = 1$, $f \in \mathscr{C}_m([0,1])$,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f.$$

3 Intégrale et primitive

Propriété 26 : Constante de primitivation

*Soit $f : I \to \mathbb{K}$, F, G deux primitives de f sur I, avec I **intervalle**.*

Alors on a $C \in \mathbb{K}$ tel que $\forall x \in I, \quad F(x) = G(x) + C$.

Théorème 14 : fondamental de l'Analyse

Si f est continue sur un intervalle I et $a \in I$, $F : x \mapsto \int_a^x f$ est l'unique primitive de f qui s'annule en a.

Corollaire 7 : du théorème fondamental

(i) Toute fonction continue sur un intervalle possède des primitives.

(ii) Si $f \in \mathscr{C}(I, \mathbb{K})$, F primitive de f sur I, $a, b \in I$,

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \Big[F(t)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

(iii) Si f est de classe $\mathscr{C}^1([a,b])$, $f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t$.

*(iv) **Inégalité des accroissements finis** : Si f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$ et f' bornée par k, alors f est k-lipschitzienne sur $[a,b]$.*

Propriété 27 : Fonction intégrale dépendant de ses bornes

Soient I, J intervalles de $\mathbb{R}$, $u, v : I \to J$ dérivables, $f : J \to \mathbb{K}$ continue.

L'application $\varphi : \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t \end{array} \right.$ est dérivable sur I et

$$\forall x \in I, \quad \varphi'(x) = v'(x) f(v(x)) - u'(x) f(u(x)).$$

Propriété 28 : Intégration par parties

Si u, v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur I,

$$\forall a, b \in I, \quad \int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t$$

Propriété 29 : Changement de variable

Si I intervalle, $\varphi : [\alpha, \beta] \to I$ de classe $\mathscr{C}^1$, f continue sur I,

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)\,\mathrm{d}u.$$

4 Calcul de primitives et d'intégrales

Méthode 1 : Technique de calcul de primitives et d'intégrales

a Calculs directs

Il est bien entendu indispensable de connaître ses primitives usuelles (cf formulaire).

On reconnaît souvent une forme $u' \times v'(u)$ qui s'intègre en $v \circ u$ (voir aussi le changement de variable)

On peut parfois passer par les complexes : par définition, la partie réelle (imaginaire) de la primitive est la primitive de la partie réelle (imaginaire).

b L'intégration par parties

Fonction dont la dérivée est plus simple... ...comme par exemple les fonctions $\ln, \operatorname{Arccos}, \operatorname{Arcsin}, \operatorname{Arctan}$, etc.

Abaissement du degré, formule de récurrence

c Le changement de variable

On veut calculer $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t$: C'est en fait le cas où on reconnaît une forme $\varphi' \times f \circ \varphi$.

On veut calculer $\int f(x)\mathrm{d}x$

Dans ce cas, il faut écrire $x = \varphi(t)$ avec φ de classe $\mathscr{C}^1$. Mais attention, si on fait un calcul de primitive, il faudra choisir φ **bijective** pour pouvoir à la fin du calcul revenir de t à x ($t = \varphi^{-1}(x)$). Si c'est un calcul d'intégrale avec des bornes, φ n'a pas besoin d'être bijective ! (on en revient pas à la première variable.)

Comment déterminer un bon changement de variable ? Pas toujours facile, mais voici quelques tuyaux pour y parvenir.

d Les fractions rationnelles

Parfois, un simple changement de variable, ou des astuces du type $+1-1$ permettent de calculer les primitives.

Si ce n'est pas possible de simplifier « à vue », l'idée est de se ramener à des fractions simples pour utiliser, si $a \in \mathbb{R}$, sur $]a, +\infty[$ ou $]-\infty, a[$ et $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int \frac{1}{(x-a)^n}\,\mathrm{d}x = \frac{-1}{(n-1)(t-a)^{n-1}} + C \text{ si } n \neq 1$$

$$\int \frac{1}{x-a}\,\mathrm{d}x = \ln|t-a| + C.$$

Pour se faire on procède à une **décomposition en éléments simples**. Ne pas oublier la partie entière si elle est non nulle.

Il y a un autre cas à traiter : c'est celui pour lequel on obtient un facteur ax^2+bx+c au dénominateur sans racine réelle : cela donne dans la décomposition un terme en $\dfrac{\alpha x+\beta}{ax^2+bx+c}$, qui se primitive en $\ln$ et Arctan :

- On se débarrasse du x au numérateur en faisant apparaître la dérivée $2ax+b$ du dénominateur et on intègre en $\ln$,
- on met sous forme canonique le dénominateur du terme restant et on intègre en Arctan.

e Les fonctions trigonométriques

Si on veut intégrer une fonction polynomiale en $\cos x$ et $\sin x$, le plus simple est de linéariser. Cependant, si on a un terme en $\sin^p x \cos^q x$ avec p ou q impair, on peut poster $t = \cos x$ si q est impair et $t = \sin x$ si p est impaire en utilisant $\cos^2 + \sin^2 = 1$.

Si on veut intégrer une fraction rationnelle en $\cos x$ et $\sin x$, on applique :

Règles de Bioche

Si « $f(x)\mathrm{d}x$ » est invariant par

- $x \mapsto -x$, on pose $t = \cos x$;
- $x \mapsto \pi - x$, on pose $t = \sin x$;
- $x \mapsto \pi + x$, on pose $t = \tan x$;
- Sinon on pose $t = \tan\frac{x}{2}$.

Ne pas oublier le $\mathrm{d}x$!!

f Les fonctions hyperboliques

Pour les fonctions faisant intervenir $\mathrm{ch}, \mathrm{sh}, \mathrm{th}$ et $\exp$, on peut poser $t = \mathrm{e}^x$ ($\mathrm{ch}\,x = \frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)$, $\mathrm{sh}\,x = \frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)$, $\mathrm{th}(x) = \dfrac{t^2-1}{t^2+1}$.)

Si l'on a une fraction rationnelle en $\mathrm{ch}, \mathrm{sh}, \mathrm{th}$, il peut être plus efficace d'appliquer un changement de variable obtenu grâce aux règles de Bioche appliquées à la fraction rationnelle dans laquelle on aura remplacé mentalement $\mathrm{ch}, \mathrm{sh}, \mathrm{th}$ par $\cos, \sin, \tan$ respectivement.

g Les fonctions avec radical

- Si l'on souhaite intégrer une fraction rationnelle en x et $\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$ (x et $\sqrt{ax+b}$ en particulier), on pose $t = \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$.
- Si l'on souhaite intégrer une fraction rationnelle en x et $\sqrt{ax^2+bx+c}$ ($a \neq 0$), il faut mettre ce dernier sous forme canonique pour obtenir du $\sqrt{\pm(\alpha x+\beta)^2 \pm 1}$ puis poser $t = \alpha x + \beta$. Ensuite, pour :
  - ⋆ $\sqrt{t^2+1}$ on pose $t = \mathrm{sh}\,u$ ($\mathrm{sh}^2+1 = \mathrm{ch}^2$) ou $t = \tan u$ ($1+\tan^2 = \dfrac{1}{\cos^2}$, attention à l'intervalle dans ce cas là.)
  - ⋆ $\sqrt{t^2-1}$ on pose $t = \pm\mathrm{ch}\,u$ suivant le signe de t. ($\mathrm{ch}^2-1 = \mathrm{sh}^2$.)
  - ⋆ $\sqrt{1-t^2}$ on pose $t = \sin u$ ou $t = \cos u$ ($1-\cos^2 = \sin^2$ et $1-\sin^2 = \cos^2$.)

5 Formules de Taylor

Définition 16

Si f est n fois dérivable en a, son **développement de Taylor** en a à l'ordre n est

$$T_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n,$$

et le **reste de Taylor** de f en a à l'ordre n est $R_n = f - T_n$ (tel que $f = T_n + R_n$).

On sait déjà que si f est polynomiale de degré d, pour tout $n \geqslant d+1$, $R_n \equiv 0$.

On va chercher à :

- exprimer **globalement** R_n : c'est la formule de Taylor avec reste intégral,
- majorer **globalement** R_n : c'est l'inégalité de Taylor-Lagrange,
- dominer **localement** R_n : c'est la formule de Taylor-Young.

a Taylor reste intégrale

Propriété 30 : Formule de Taylor avec reste intégral

*Soit $f : I \to \mathbb{K}$ telle que f **est de classe** $\mathscr{C}^{n+1}$ **sur** I, $a \in I$. Pour tout $x \in I$,*

$$R_n(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$$

ie

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

b Inégalité de Taylor-Lagrange

Propriété 31 : Inégalité de Taylor-Lagrange

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ telle que f ***est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur*** *I, $a \in I$. Pour tout $x \in I$,*

$$\begin{aligned} |R_n(x)| &= \left| f(x) - \left(f(a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \right) \right| \\ &\leqslant \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{t \in [a,x]} \left| f^{(n+1)}(t) \right|. \end{aligned}$$

c Formule de Taylor-Young

Propriété 32 : Primitivation de DL

Soit $f : I \to E$ admettant un $DL_n(a)$ avec $a \in I$

$$f(x) = a_0 + \cdots + a_n(x-a)^n + o\left((x-a)^n\right)$$

Toute primitive F de f sur I admet un $DL_{n+1}(a)$

$$\begin{aligned} F(x) = \boxed{\boldsymbol{F(a)}} + a_0(x-a) + \frac{a_1}{2}(x-a)^2 \\ + \cdots + \frac{a_n}{n+1}(x-a)^{n+1} + o\left((x-a)^{n+1}\right) \end{aligned}$$

obtenu par primitivation terme à terme du DL de f.

Propriété 33 : Formule de Taylor-Young

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ telle que f ***est de classe $\mathscr{C}^n$ sur*** *I, $a \in I$.*

$$R_n(x) = \underset{x \to a}{o}\left((x-a)^n\right)$$

ie

$$\begin{aligned} f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \\ + \underset{x \to a}{o}\left((x-a)^n\right). \end{aligned}$$