

Fonctions numériques
Continuité, continuité uniforme,
dérivabilité, convexité, intégration sur un
segment (MP2I)



Table des matières

10 Fonctions numériques	1
Continuité, continuité uniforme, dérivabilité, convexité, intégration sur un segment (MP2I)	1
I Continuité	3
1 Définition	3
2 Cas des fonctions à valeurs réelles	4
3 Uniforme continuité	6
4 Application au théorème d'approximation uniforme par des fonctions en escalier	7
5 Fonctions lipschitziennes	9
II Dérivabilité	9
1 Nombre dérivé et fonction dérivée	9
a Dérivabilité en un point, sur un intervalle	9
b Opérations algébriques	10
c Dérivée d'une réciproque	11
2 Dérivées successives et classe d'une fonction	11
3 Applications	13
a Condition nécessaire d'extremum local	13
b Théorème de Rolle	14
c Théorème des accroissements finis	14
d Inégalité des accroissements finis	15
e Variation des fonctions dérivables	16
f Théorème de la limite de la dérivée	16
III Fonctions convexes d'une variable réelle	17
1 Définitions	17
2 Caractérisations	18
3 Cas des fonctions dérivables	18
4 Inégalités de convexité	19
IV Intégration sur un segment d'une fonction continue par morceaux	20
1 Définition et propriétés	20
2 Sommes de Riemann	23
3 Intégrale et primitive	25
4 Calcul de primitives et d'intégrales	27
a Calculs directs	27
b L'intégration par parties	27
c Le changement de variable	27
d Les fractions rationnelles	27
e Les fonctions trigonométriques	28
f Les fonctions hyperboliques	28
g Les fonctions avec radical	28
5 Formules de Taylor	29
a Taylor reste intégrale	29
b Inégalité de Taylor-Lagrange	29
c Formule de Taylor-Young	30

Dans tout le chapitre, I désigne un intervalle réel contenant au moins deux points, \mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

CONTINUITÉ

1 Définition

Définition 1 : Continuité

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{K}$, $a \in I$.

f est dite continue en a si et seulement si $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} f(a)$, si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, |x - a| \leq \eta \implies |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon.$$

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{K}$. f est dite **continue sur** I lorsque f est continue en tout point de I .

On note $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ ou $\mathcal{C}(I)$ ou $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ ou $\mathcal{C}^0(I)$ l'ensemble de telles fonctions.

Remarque

R1 – Ainsi, f n'est pas continue en a si et seulement si

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \eta > 0, \exists x \in I, |x - a| \leq \eta \text{ et } |f(x) - f(a)| > \varepsilon.$$

R2 – f est continue en a si et seulement si f est définie en a et a une limite finie en a .

R3 – f est continue en a si et seulement si $\Re(f)$ et $\Im(f)$ le sont.

Propriété 1 : Caractérisations séquentielles

(i) f est continue en a

$$\iff (ii) \forall (a_n) \in I^{\mathbb{N}} \mid a_n \rightarrow a, f(a_n) \rightarrow f(a).$$

$$\iff (iii) \forall (a_n) \in I^{\mathbb{N}} \mid a_n \rightarrow a, (f(a_n)) \text{ converge.}$$

Démonstration

On montre (i) \implies (ii) \implies (iii) \implies (ii) \implies (i).

Si f est continue en a , et si $(a_n) \in I^{\mathbb{N}}$, on se donne $\varepsilon > 0$ et $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in I$ tel que $|x - a| \leq \eta$, $|f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$. Or on a un rang N à partir duquel $|a_n - a| \leq \eta$. donc, pour $n \geq N$, $|f(a_n) - f(a)| \leq \varepsilon$, ce qui donne bien $f(a_n) \rightarrow f(a)$ et donc en particulier converge.

Si pour toute suite $(a_n) \in I^{\mathbb{N}}$ telle que $a_n \rightarrow a$, $(f(a_n))$ converge, on montre que toutes les limites valent $f(a)$. Soit une telle suite (a_n) et ℓ la limite respective de $(f(a_n))$. En considérant une suite (a'_n) telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_{2n} = a_n$ et $b_{2n+1} = a$ on a bien $b_n \rightarrow a$ donc $f(b_n)$ converge vers une limite nécessairement égale à ℓ et à $f(a)$ par extraction, donc $\ell = f(a)$. Finalement, toutes les limites des suites $(f(a_n))$ sont égales à $f(a)$.

La dernière implication se traite classiquement par contraposée : on suppose que f n'est pas continue en a , ce qui fournit $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $\eta > 0$, on ait $x \in I$ vérifiant $|x - a| \leq \eta$ et pourtant $|f(x) - f(a)| > \varepsilon$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on peut l'appliquer à $\eta = \frac{1}{2^n}$ ce qui fournit $a_n \in I$ tel que $|a_n - a| \leq \frac{1}{2^n}$ et $|f(a_n) - f(a)| > \varepsilon$. On construit bien ainsi une suite $(a_n) \in I^{\mathbb{N}}$ telle que $a_n \rightarrow a$ et $f(a_n) \not\rightarrow f(a)$. ■

Remarque

R4 – Une combinaison linéaire, un produit, un quotient, une composée de fonctions continues l'est encore.

$\mathcal{C}(I, \mathbb{K})$ est une sous-algèbre de $(\mathbb{K}^I, +, \times, \cdot)$.

R5 – Être continue en a est équivalent à être continue à gauche et à droite de a .



Voir exercice du TD : 7, 8

2 Cas des fonctions à valeurs réelles

Dans ce paragraphe, toutes les fonctions sont à valeurs réelles.

Théorème 1 : des valeurs intermédiaires

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Si $a, b \in I$ tels que $a < b$ et $m \in [f(a), f(b)]$, alors il existe $c \in [a, b]$ tel que $m = f(c)$. Autrement dit,

$$[f(a), f(b)] \subset f([a, b]).$$

Extension : Si $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ tels que $a < b$, $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ continue sur $]a, b[$ et admet des limites $\lim_{a^+} f$ à droite de a et $\lim_{b^-} f$ à gauche de b , alors pour tout $m \in]\lim_{a^+} f, \lim_{b^-} f[$, on a $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = m$. Autrement dit,

$$]\lim_{a^+} f, \lim_{b^-} f[\subset f(]a, b[).$$

Remarque

R6 – $[f(a), f(b)]$ signifie $[f(a), f(b)]$ ou $[f(b), f(a)]$ selon la position relative de $f(a)$ et $f(b)$.

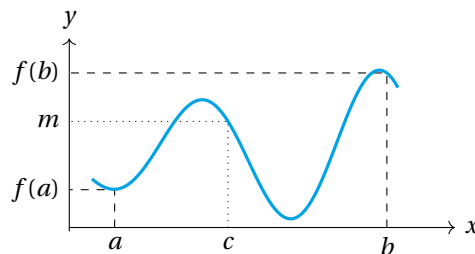


FIGURE 1 – Le théorème des valeurs intermédiaires

Remarque

R7 – La réciproque est fautive : on peut vérifier la propriété des valeurs intermédiaires sans être continu.

C'est le cas par exemple de la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} \cos \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad \text{discontinue en } 0.$$

Exercice 1

Montrer qu'un polynôme réel de degré impair a toujours au moins une racine réelle.

En effet, comme on a des limites $\pm\infty$ ou $\mp\infty$ en $\pm\infty$, notre polynôme continu prend au moins une valeur positive et une valeurs négative sur \mathbb{R} .



Voir exercice du TD : 9, 10, 11

Corollaire 1 : Image continue d'un intervalle

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.
Autrement dit, si f est continue sur un intervalle I , alors $f(I)$ est un intervalle.

Remarque

R8 – \triangle En général $f([a, b]) \neq [f(a), f(b)]$ et $f(]a, b[) \neq]\lim_{a^+} f, \lim_{b^-} f[$.

R9 – Le type de l'intervalle n'est pas conservé en général.

Théorème 2 : des bornes atteintes

Une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.

Ainsi, si $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et si f est continue sur le segment $[a, b]$, alors on a $c, d \in [a, b]$ tels que $f(c) = \min_{[a,b]} f$ et $f(d) = \max_{[a,b]} f$.

Corollaire 2 : Image continue d'un segment

L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.
Avec les notations précédentes, f étant continue sur $[a, b]$,

$$f([a, b]) = \left[\min_{[a,b]} f, \max_{[a,b]} f \right] = [f(c), f(d)]$$

Propriété 2 : Stricte monotonie d'une fonction continue injective sur un intervalle

Si f est continue et injective sur un intervalle I , f est strictement monotone sur I .

Théorème 3 : de la bijection

Soit I un intervalle et f définie au moins sur I , à valeurs réelles. On suppose que

H1 f est continue sur I .

H2 f est strictement monotone sur I .

Alors

C1 f induit une bijection \tilde{f} de I sur $J = f(I)$.

C2 \tilde{f}^{-1} est strictement monotone de même monotonie que f .

C3 \tilde{f}^{-1} est continue sur J .

Définition 2 : Homéomorphisme (HP)

$f : I \rightarrow J$ est appelé **homéomorphisme** lorsque f est bijective et bicontinue, c'est-à-dire f continue sur I et f^{-1} est continue sur J .

Le « théorème de la bijection » se reformule alors en

Théorème 4 : Théorème de l'homéomorphisme

Toute fonction continue strictement monotone induit de I sur $J = f(I)$ un homéomorphisme.



3 Uniforme continuité

La continuité dont on a parlé jusqu'à maintenant était une propriété locale : au voisinage d'un point a , si je me rapproche de a , alors mon image par f se rapproche de $f(a)$, ce qui s'écrit formellement :

$$\forall a \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, |x - a| \leq \eta \implies |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$$

Définition 3 : Uniforme continuité

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{K}$. On dit que f est **uniformément continue** sur I si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x, y \in I, |x - y| \leq \eta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

Cela impose que si x et y sont suffisamment proches, mais n'importe où dans I , alors $f(x)$ et $f(y)$ sont proches également.

Ainsi, pour des fonctions à trop grandes variations, on pourra ne pas avoir uniforme continuité.

Propriété 3 : UC \implies Continue

Une fonction uniformément continue sur I est continue sur I . Réciproque fausse.

Démonstration

Si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall a, x \in I, |x - a| \leq \eta \implies |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$$

alors

$$\forall a \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, |x - a| \leq \eta \implies |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon. \blacksquare$$

Propriété 4 : Caractérisation séquentielle

f est uniformément continue sur I si et seulement si

$$\forall (x_n)_n, (y_n)_n \in I^{\mathbb{N}} \mid x_n - y_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0, f(x_n) - f(y_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Remarque

R 10 – N'apparaît pas dans le programme officiel, mais très utile pour démontrer qu'une fonction n'est pas uniformément continue.

Démonstration

(\implies) Si f uniformément continue et $x_n - y_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et $\varepsilon > 0$.

On a $\eta > 0$ tel que $\forall x, y \in I, |x - y| \leq \eta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$ or on a $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N, x_n - y_n \leq \eta$, ainsi $\forall n \geq N, f(x_n) - f(y_n) \leq \varepsilon$ et donc $f(x_n) - f(y_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

(\impliedby) Par contraposée, si f n'est pas uniformément continue, on a $\varepsilon > 0$ tel que $\forall \eta > 0, \exists x, y \in I, |x - y| \leq \eta$ et $|f(x) - f(y)| > \varepsilon$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\eta = \frac{1}{n+1}$, on a x_n, y_n des réels tels que $|x_n - y_n| \leq \frac{1}{n+1}$ et $|f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon$. Ainsi, $x_n - y_n \rightarrow 0$ et $f(x_n) - f(y_n) \not\rightarrow 0$. \blacksquare

Propriété 5 : Stabilités

Une combinaison linéaire, une composée de fonctions uniformément continue l'est encore.

Faux pour un produit ou un quotient.

Exemple

E1 – $f : x \mapsto |x|$ est uniformément continue sur \mathbb{R} .

E2 – $f : x \mapsto x^2$ n'est pas uniformément continue sur \mathbb{R} : problème si $x \rightarrow \pm\infty$ (pente trop forte). $x_n = n + \frac{1}{n}$, $y_n = n$ alors $x_n - y_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$ mais $x_n^2 - y_n^2 = 2 + \frac{1}{n^2} \not\rightarrow 0$.

E3 – $f : x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sur \mathbb{R} (malgré la pente infinie en 0) : si $x_n - y_n \rightarrow 0$, on peut supposer $x_n \geq y_n$, alors

$$(\sqrt{x_n} - \sqrt{y_n})^2 = x_n - 2\sqrt{x_n y_n} + y_n \leq x_n - 2y_n + y_n = x_n - y_n \rightarrow 0.$$

Donc $|\sqrt{x_n} - \sqrt{y_n}| \leq \sqrt{|x_n - y_n|}$. Donc $\sqrt{x_n} - \sqrt{y_n} \rightarrow 0$.

E4 – $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ n'est pas uniformément continue sur \mathbb{R}_+^* problème si $x \rightarrow 0$ (pente trop forte).

$x_n = \frac{2}{n}$, $y_n = \frac{1}{n}$ alors $x_n - y_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$ mais $\frac{1}{x_n} - \frac{1}{y_n} = -\frac{n}{2} \not\rightarrow 0$.

Remarque

R11 – La fonction $\sqrt{\cdot}$ vérifie

$$\forall x, y, \quad \sqrt{x} - \sqrt{y} \leq k \times |x - y|^{1/2},$$

on dit qu'elle est 1/2-hölderienne. Toute fonction α -hölderienne est facilement uniformément continue.

Théorème 5 : de Heine

Tout fonction continue sur un **segment** est uniformément continue sur ce segment.

Démonstration

Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ continue non uniformément continue, on a $\varepsilon > 0$ et $(x_n)_n, (y_n)_n \in [a, b]^{\mathbb{N}}$ telles que $x_n - y_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et pour tout n , $f(x_n) - f(y_n) > \varepsilon$. (voir preuve de la caractérisation séquentielle).

D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut extraire de la suite bornée x une suite convergente $(x_{\varphi(n)})_n$, puis de la suite bornée $(y_{\varphi(n)})_n$ une suite convergente $(y_{\varphi \circ \psi(n)})_n$. Alors $(x_{\varphi \circ \psi(n)})_n$ est aussi convergente comme suite extraite de $(x_{\varphi(n)})_n$ et $x_{\varphi \circ \psi(n)} - y_{\varphi \circ \psi(n)} \rightarrow 0$ donc les deux limites sont égales à ℓ .

Alors, par continuité, $f(x_{\varphi \circ \psi(n)}) \rightarrow f(\ell)$ et $f(y_{\varphi \circ \psi(n)}) \rightarrow f(\ell)$ donc

$$f(x_{\varphi \circ \psi(n)}) - f(y_{\varphi \circ \psi(n)}) \rightarrow 0$$

ce qui contredit $f(x_{\varphi \circ \psi(n)}) - f(y_{\varphi \circ \psi(n)}) > \varepsilon$. ■



Voir exercice du TD : 12, 13, 14

4 Application au théorème d'approximation uniforme par des fonctions en escalier

On redonne la définition d'une fonction continue par morceaux et on utilise le théorème de Heine pour démontrer le théorème d'approximation uniforme par des fonctions en escalier, résultat à la base de la construction de l'intégrale de Riemann sur un segment.

**Définition 4 : Fonctions continues par morceaux**

Une application $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ est dite **continue par morceaux** si et seulement s'il existe une subdivision $\sigma = (a_0, a_1, \dots, a_n)$ de $[a, b]$ (avec $a_0 = a < a_1 < \dots < a_n = b$, donc) telle que

$$\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \begin{cases} f|_{]a_k, a_{k+1}[} \text{ est continue.} \\ f \text{ admet des limites à droite de } a_k \text{ et à gauche de } a_{k+1}. \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \begin{cases} f|_{]a_k, a_{k+1}[} \text{ est continue.} \\ f|_{]a_k, a_{k+1}[} \text{ est prolongeable par continuité à } [a_k, a_{k+1}]. \end{cases}$$

On dit alors que σ est **adaptée** à f .

On note $\mathcal{C}_m([a, b])$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$.

$f : I \rightarrow \mathbb{K}$ est dite continue par morceaux (sur I) si sa restriction à tout segment l'est.

Théorème 6 : Approximation uniforme des fonctions CPM sur un segment par des fonctions en escalier

Toute fonction continue par morceaux sur un segment est limite uniforme sur ce segment d'une suite de fonctions en escalier.

Démonstration

Cas continu Soit $\varepsilon > 0$. Par théorème de Heine, f est uniformément continue sur $[a, b]$. On a donc $\eta > 0$ tel que

$$\forall x, y \in [a, b], |x - y| \leq \eta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

On choisit une subdivision $\sigma = (a_0, \dots, a_n)$ de $[a, b]$ de pas $h = \max_{0 \leq k \leq n-1} (a_{k+1} - a_k) \leq \eta$.

On définit alors $\varphi : x \mapsto \begin{cases} f(a_k) & \text{si } x \in [a_k, a_{k+1}[\\ f(b) & \text{si } x = b \end{cases}$ une fonction en escalier.

Alors, si $x \in [a, b]$, on a k tel que $x \in [a_k, a_{k+1}[$ et $|x - a_k| \leq |a_{k+1} - a_k| \leq \eta$ donc $|f(x) - \varphi(x)| = |f(x) - f(a_k)| \leq \varepsilon$, soit $x = b$ et $|f(b) - \varphi(b)| = 0 \leq \varepsilon$.

On a donc bien $\|f - \varphi\|_\infty \leq \varepsilon$.

Cas continu par morceaux Soit $\sigma = (a_0, \dots, a_n)$ de $[a, b]$ adaptée à f .

Chaque $f|_{]a_k, a_{k+1}[}$ se prolonge par continuité en une fonction f_k continue sur $[a_k, a_{k+1}]$: on a $\varphi_k \in \mathcal{E}([a, b])$ telle que $\|f_k - \varphi_k\|_\infty \leq \varepsilon$.

On pose alors $\varphi : x \mapsto \begin{cases} \varphi_k(x) & \text{si } x \in]a_k, a_{k+1}[\\ f(a_k) & \text{si } x = a_k \end{cases}$ une fonction en escalier.

Alors, si $x \in [a, b]$, soit on a k tel que $x \in]a_k, a_{k+1}[$ et $|\varphi(x) - f(x)| = |\varphi_k(x) - f_k(x)| \leq \varepsilon$ soit on a k tel que $x = a_k$ et $|\varphi(a_k) - f(a_k)| = 0 \leq \varepsilon$.

On a donc bien $\|f - \varphi\|_\infty \leq \varepsilon$.

Définition d'une suite Quitte à prendre $\varepsilon = \frac{1}{2^n}$ où $n \in \mathbb{N}$, on construit une suite (φ_n) de fonctions en escalier sur $[a, b]$ vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, \|f - \varphi_n\|_\infty \leq \frac{1}{2^n}$, donc telle que $\varphi_n \xrightarrow{CU} f$. ■

5 Fonctions lipschitziennes

Définition 5 : Fonction lipschitzienne

$f : X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est dite k -lipschitzienne sur X (où $k \in \mathbb{R}_+^*$) si

$$\forall x, y \in X, |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|.$$

Propriété 6 : Lipschitzienne \Rightarrow UC

Toute fonction lipschitzienne (ou plus généralement hölderienne) sur I y est uniformément continue. La réciproque est fautive.

Remarque

R 12 – f lipschitzienne $\Leftrightarrow f$ uniformément continue $\Leftrightarrow f$ continue.

Plus précisément :

f lipschitzienne $\Rightarrow f$ hölderienne $\Rightarrow f$ uniformément continue $\Rightarrow f$ continue.

Démonstration

$\forall x, y \in I, |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|^\alpha$ ($\alpha = 1$ si lipschitzienne).
Donc si $x_n - y_n \rightarrow 0, f(x_n) - f(y_n) \rightarrow 0$. ■

Exemple

E 5 – $\sqrt{\cdot}$ est uniformément continue mais pas lipschitzienne car si

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^+, |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq k|x - y|$$

avec $k > 0$, on va avoir un problème près de zéro (pente trop forte). Pour $y = 0$, on obtient $\forall x \in \mathbb{R}^+, \sqrt{x} \leq kx$ et si $x \neq 0, \sqrt{x} \geq \frac{1}{k}$ donc $x \geq \frac{1}{k^2}$. Contradiction.

E 6 – Par inégalité des accroissements finis, une fonction continue sur I et dérivable sur $\overset{\circ}{I}$ (c'est le cas si elle est de classe \mathcal{C}^1) à dérivée bornée sera lipschitzienne donc uniformément continue. C'est le cas par exemple des fonctions \sin et \cos .

III DÉRIVABILITÉ

1 Nombre dérivé et fonction dérivée

a Dérivabilité en un point, sur un intervalle

Définition 6 : Nombre dérivé, fonction dérivée

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{K}, a \in I$. On dit que f est **dérivable en** a si et seulement si $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ a une limite lorsque $x \rightarrow a$ si et seulement si $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ a une limite lorsque $h \rightarrow 0$.

Cette limite est alors notée $f'(a)$ ou $\frac{df}{dx}(a)$ et appelée **nombre dérivé de f en a** .



Lorsqu'elle existe, on a donc

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

f est dérivable sur I si et seulement si f est dérivable en tout point de I .
On définit alors la fonction dérivée

$$f' = Df = \frac{df}{dx} : \begin{cases} I & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto f'(x) \end{cases}.$$

Remarque : Interprétation géométrique

R 13 – Il s'agit de la limite des cordes dont une extrémité est le point $(a, f(a))$ lorsque $x \rightarrow a$. D'où l'équation de la tangente en a : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Si $\left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right| \rightarrow +\infty$, f n'est pas dérivable en a , mais il y a une tangente verticale.

Propriété 7 : DL₁

f est dérivable en a si et seulement si elle admet un développement limité à l'ordre 1 en a , c'est-à-dire si on peut écrire

$$f(a+h) = f(a) + hb + h \cdot \varepsilon(h) = f(a) + hb + o(h)$$

où $b \in \mathbb{K}$ et $\varepsilon(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$.

Dans ce cas, $b = f'(a)$.

Corollaire 3 : dérivable \Rightarrow continue

Si f est dérivable en a , alors f est continue en a .
La réciproque est fautive.

Définition 7 : Dérivabilité à gauche, à droite

Si $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in I$, f est dite **dérivable à gauche** (respectivement **à droite**) de a lorsque $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ admet une limite à gauche (respectivement à droite) de a , notée $f'_g(a)$ (respectivement $f'_d(a)$).

Propriété 8 : Caractérisation de la dérivabilité

Si $a \in \overset{\circ}{I}$, f est dérivable en a si et seulement si f est dérivable à gauche et à droite de a et $f'_g(a) = f'_d(a)$.
On a alors $f'_g(a) = f'_d(a) = f'(a)$

b

Opérations algébriques

Propriété 9 : Opérations algébriques

Si $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in I$, $\lambda \in \mathbb{R}$

(i) $f + g$ dérivable en a et $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$.

(ii) $f \times g$ dérivable en a et

$$(f \times g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a).$$

(iii) λf dérivable en a et $(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a)$.

(iv) Si g ne s'annule pas, $\frac{f}{g}$ est dérivable en a et

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}.$$

Remarque

R 14 – Plus généralement, si f_1, \dots, f_n sont dérivables en a , $f_1 \times \dots \times f_n$ l'est aussi et

$$(f_1 \times \dots \times f_n)'(a) = \sum_{k=1}^n f_1(a) \dots f_{k-1}(a) f_k'(a) f_{k+1}(a) \dots f_n(a).$$

Propriété 10 : Composée

Soient I, J sont des intervalles, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ et $g: J \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $f(I) \subset J$ et $a \in I$.
Si f est dérivable en a et g est dérivable en $b = f(a)$, alors $g \circ f$ est dérivable en a et

$$(g \circ f)'(a) = f'(a) \times g'(f(a)).$$

Remarque

R 15 – Les propriétés de dérivation de somme, produit, combinaison linéaire quotient par une fonction jamais nulle, composée de fonctions dérivable s'étendent naturellement aux fonctions dérivables sur un intervalle.

C

Dérivée d'une réciproque

Propriété 11 : Dérivée d'une réciproque

Si $f: I \rightarrow J$ bijective et dérivable sur I , alors f^{-1} est dérivable sur $\{f(x) ; x \in I \text{ et } f'(x) \neq 0\}$ et

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

Remarque

- R 16 – Si $f'(a) = 0$, alors le graphe de f admet une tangente verticale en $b = f(a)$.
- R 17 – Dans tous les cas, la tangente en $(b, f^{-1}(b)) = (f(a), a)$ à $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ est l'image par la symétrie d'axe d'équation $y = x$ de la tangente en $(a, f(a))$ à \mathcal{C}_f .
- R 18 – Pour retrouver la formule, il suffit de dériver $f \circ f^{-1} = \text{id}$.

2 Dérivées successives et classe d'une fonction

Définition 8 : Dérivées successives et classe d'une fonction

Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.

- Lorsque f est dérivable n fois, note $f^{(n)}$ sa dérivée n^{e} tel que $f^{(0)} = f$ et pour tout k , $f^{(k+1)} = (f^{(k)})'$.
- Si $k \in \mathbb{N}$, f est **de classe \mathcal{C}^k sur I** lorsque f est k fois dérivable et $f^{(k)}$ est continue sur I . On note $\mathcal{C}^k(I)$ l'ensemble des fonctions de classe \mathcal{C}^k sur I .
- f est **de classe \mathcal{C}^∞ sur I** lorsque f est de classe \mathcal{C}^k pour tout $k \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire lorsque f est indéfiniment dérivable.

**Remarque**

R 19 – On peut être k fois dérivable sans être de classe \mathcal{C}^k .

Par exemple $f: x \mapsto x^2 \sin \frac{1}{x}$ est dérivable en 0 sans y être de classe \mathcal{C}^1 .

Propriété 12 : Classe d'une dérivée

Si $n \geq 1$, f est n fois dérivable (respectivement de classe \mathcal{C}^n) si et seulement si f dérivable et f' est $n-1$ fois dérivable (respectivement de classe \mathcal{C}^{n-1}). Alors $f^n = (f')^{(n-1)}$.

Propriété 13 : Opérations sur les dérivées d'ordre n

Soient $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ n fois dérivable (respectivement de classe \mathcal{C}^n) sur I , $\lambda \in \mathbb{R}$.

(i) $f + g$ est n fois dérivable (respectivement de classe \mathcal{C}^n) sur I et

$$(f + g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}.$$

(ii) λf est n fois dérivable (respectivement de classe \mathcal{C}^n) sur I et

$$(\lambda f)^{(n)} = \lambda f^{(n)}.$$

(iii) **Formule de Leibniz**

$f \times g$ est n fois dérivable (respectivement de classe \mathcal{C}^n) sur I et

$$(f \times g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

(iv) Si g ne s'annule pas sur I , $\frac{f}{g}$ est n fois dérivable (respectivement de classe \mathcal{C}^n) sur I .

(v) Si $h: J \rightarrow \mathbb{R}$, tel que $f(I) \subset J$ est n fois dérivable (respectivement de classe \mathcal{C}^n) sur J , $f \circ g$ est n fois dérivable (respectivement de classe \mathcal{C}^n) sur I .

Remarque

R 20 – Le formule de Faà di Bruno (hors-programme) donne une expression de $(f \circ g)^{(n)}$.

Exercice 2 : CCINP 3**Propriété 14 : Fonctions usuelles**

Les fonctions usuelles \exp , \sin , \cos , \tan , \ln , ch , sh , th , Arctan et polynomiales ou rationnelles sont de classe \mathcal{C}^∞ sur leur ensemble de définition.

Les fonctions Arcsin et Arccos sont de classe \mathcal{C}^∞ sur $] -1, 1[$.

$\sqrt{\cdot}$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}_+^* .

Définition 9 : \mathcal{C}^k -difféomorphismes (HP)

$f: I \rightarrow J$ est un \mathcal{C}^k -difféomorphisme lorsque

- f est bijective,
- f est de classe \mathcal{C}^k sur I ,
- f^{-1} est de classe \mathcal{C}^k sur J .

Remarque

R21 – Un \mathcal{C}^0 -difféomorphisme est un homéomorphisme.

Propriété 15 : Caractérisation (HP)

Soit $f: I \rightarrow J$ bijective de classe \mathcal{C}^k avec $k \geq 1$.

Alors f est un \mathcal{C}^k -difféomorphisme (ie f^{-1} est de classe \mathcal{C}^k sur J) si et seulement si f' ne s'annule pas sur I .

Remarque

R22 – Comme f' est continue, si elle ne s'annule pas, elle garde un signe constant et f est strictement monotone, donc injective automatiquement.



Voir exercice du TD : 16, 18, 22

3 Applications



Condition nécessaire d'extremum local

Définition 10 : Extremum local

Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in I$.

- (i) On dit que f admet un **minimum** (respectivement **maximum**) **local** en a lorsqu'il existe un voisinage V de a tel que $\forall x \in I \cap V$, $f(x) \geq f(a)$ (respectivement $f(x) \leq f(a)$).
- (ii) On dit que f admet un **minimum** (respectivement **maximum**) **local strict** en a lorsqu'il existe un voisinage V de a tel que $\forall x \in (I \cap V) \setminus \{a\}$, $f(x) > f(a)$ (respectivement $f(x) < f(a)$).

On parle alors d'**extremum local**.

Lorsque $V = \mathbb{R}$, on parle d'**extremum global**.

Remarque

R23 – Ainsi, f admet un minimum (respectivement maximum) local en a si et seulement si

$$\exists \eta > 0, \forall x \in I, |x - a| \leq \eta \implies f(x) \geq f(a)$$

(respectivement $f(x) \leq f(a)$). si et seulement si

$$\exists \varepsilon > 0, \forall h \in \mathbb{R}, a + h \in I \text{ et } |h| \leq \varepsilon \implies f(a + h) \geq f(a)$$

(respectivement $f(a + h) \leq f(a)$).

Définition 11 : point critique

Si $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \overset{\circ}{I}$ tel que f dérivable en a . On dit que a est un **point critique** de f lorsque $f'(a) = 0$.

**Propriété 16 : Condition nécessaire d'extremum local**

Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in I$ tel que

H1 $a \in \overset{\circ}{I}$

H2 f est dérivable en a

H3 f admet un extremum local en a

Alors a est un pont critique de $f: f'(a) = 0$.

La réciproque est fausse.

Remarque

R24 – Les extrema sont à chercher **parmi** les points intérieurs critiques et les points au bord.



Voir exercice du TD : 19

b**Théorème de Rolle****Théorème 7 : Théorème de Rolle**

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Si

H1 f est continue sur $[a, b]$

H2 f est dérivable sur $]a, b[$

H3 $f(a) = f(b)$

Alors $\exists c \in]a, b[, f'(c) = 0$.

Remarque

R25 – La conclusion s'écrit aussi $\exists t \in]0, 1[, f'(a + th) = 0$ où $h = b - a$.

R26 – **Interprétation cinématique** : Si un mobile M a une trajectoire **rectiligne** tel que $M(t_0) = M(t_1)$ alors il existe un instant $t \in]t_0, t_1[$ tel que $v_M(t) = 0$.

R27 –  : Faux pour des fonctions qui ne sont pas à valeurs réelles !



Voir exercice du TD : 15, 16, 17

c**Théorème des accroissements finis****Théorème 8 : Théorème des accroissements finis**

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Si

H1 f est continue sur $[a, b]$

H2 f est dérivable sur $]a, b[$

Alors $\exists c \in]a, b[, f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ ie

$$f(b) = f(a) + (b - a)f'(c).$$

Remarque

R 28 – Le résultat s'écrit encore $\exists t \in]0, 1[$, $f(b) = f(a) + (b-a)f'(a+t(b-a)) = 0$ ie $f(a+h) = f(a) + hf'(a+th)$ où $h = b-a$.

R 29 – Ce résultat généralise a priori le théorème de Rolle, mais est en fait strictement équivalent car on va utiliser ce théorème dans la preuve.

R 30 – Non valable pour des fonctions à valeurs complexes.



Voir exercice du TD : 20, 21

d Inégalité des accroissements finis

Théorème 9 : Inégalité des accroissements finis

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Si

H1 f est continue sur $[a, b]$

H2 f est dérivable sur $]a, b[$

H3 $\exists m, M \in \mathbb{R}, \forall x \in]a, b[, m \leq f'(x) \leq M$

Alors $m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$.

Remarque

R 31 – Lorsque f est de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, b]$ et $\forall x \in [a, b], m \leq f'(x) \leq M$, comme $a < b$, on peut intégrer membre à membre l'inégalité entre a et b et retrouver le résultat.

Corollaire 4 : 2^e version

Soit $f: I \rightarrow \mathbb{K}$. Si

H1 f est continue sur I

H2 f est dérivable sur $\overset{\circ}{I}$

H3 $\exists k \in \mathbb{R}, \forall x \in \overset{\circ}{I}, |f'(x)| \leq k$

Alors f est k -lipschitzienne sur I , c'est-à-dire

$$\forall x, y \in I, |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|.$$

Remarque

R 32 – En particulier, si f est dérivable sur $\overset{\circ}{I}$, f est lipschitzienne sur I si et seulement si f' est bornée sur $\overset{\circ}{I}$.

R 33 – Si f est classe \mathcal{C}^1 , on peut à nouveau retrouver le résultat directement en intégrant $|f'| \leq k$ entre x et y (attention à l'ordre des bornes...)

R 34 – Cette fois, c'est aussi valable pour des fonctions à valeurs complexes.



e

Variation des fonctions dérivables

Théorème 10 : Variation des fonctions dérivables

Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, continue sur I , dérivable sur $\overset{\circ}{I}$.

- (i) f est constante sur I si et seulement si $f' \equiv 0$ sur $\overset{\circ}{I}$.
- (ii) f est croissante (respectivement décroissante) sur I si et seulement si $f' \geq 0$ (respectivement $f' \leq 0$) sur $\overset{\circ}{I}$.
- (iii) f est strictement croissante (respectivement décroissante) sur I si et seulement si $f' \geq 0$ (respectivement $f' \leq 0$) sur $\overset{\circ}{I}$ et $\left\{x \in \overset{\circ}{I} \mid f'(x) = 0\right\}$ ne contient aucun intervalle d'intérieur non vide ie f' ne s'annule qu'en des points isolés.

Remarque

R 35 – Si f est définie sur D réunion d'intervalles, $f' = 0$ dit que f est constante sur chaque intervalle, $f' \geq 0$ dit que f est croissante sur chaque intervalle...

LA CONSTANTE DÉPEND DE L'INTERVALLE !

f

Théorème de la limite de la dérivée

Théorème 11 : Théorème de la limite de la dérivée

Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in I$ tel que

H1 f est dérivable sur $I \setminus \{a\}$

H2 f est continue en a

H3 $f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell \in \overline{\mathbb{R}}$

Alors $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$.

Donc

- soit $\ell = \pm\infty$ et \mathcal{C}_f admet une tangente verticale en a ,
- soit $\ell \in \mathbb{R}$ et f est dérivable en a , $f'(a) = \ell$ et f' est continue en a .

Remarque

R 36 – Si f' n'a pas de limite en a , on ne peut pas conclure.

Exemple

E 7 – $f: x \mapsto x^2 \sin \frac{1}{x}$ prolongé par continuité par 0 en 0.

E 8 – $f: x \mapsto x \sin \frac{1}{x}$ prolongé par continuité par 0 en 0.

R 37 – Il faut que f soit continue en a : par exemple, $f: x \mapsto \delta_{x,0}$ est dérivable sur \mathbb{R}^* et $f'(x) = 0 \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ et pourtant f n'est pas dérivable en 0.

R 38 – Ce théorème donne aussi la continuité au point de la dérivée : et donc un caractère localement \mathcal{C}^1 . Cependant, une fonction peut être dérivable sans que la dérivée soit continue. Donc ne pas pouvoir appliquer le théorème de la limite de la dérivée ne signifie pas que la fonction n'est pas dérivable !

Exercice 3 : CCINP 4**Théorème 12 : du prolongement \mathcal{C}^k (HP)**

Soit $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, et $f \in \mathcal{C}^k(I \setminus \{a\})$ telle que $\forall i \in \llbracket 0, k \rrbracket$, $f^{(i)}$ a une limite finie en a . Alors le prolongement de f par continuité en a est une fonction de classe \mathcal{C}^k sur I .

**FONCTIONS CONVEXES D'UNE VARIABLE RÉELLE****1 Définitions****Définition 12 : Fonction convexe, concave**

- $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est dite **convexe** sur I lorsque

$$\forall x, y \in I, \forall t \in [0, 1], f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y)$$

- f est dite **concave** sur I lorsque $-f$ est convexe.

Remarque

R39 – On pourrait se contenter de $t \in]0, 1[$.

R40 – Concave n'est pas le contraire de convexe !

On peut être les deux à la fois (quand ?) et on n'est en général ni l'un ni l'autre.

La définition donne immédiatement l'interprétation géométrique suivante :

Propriété 17 : Caractérisation par interprétation géométrique

f est convexe (respectivement concave) si et seulement si tout sous-arc de sa courbe est situé en dessous (respectivement au-dessus) de la corde correspondante.

Remarque

R41 – Un point en lequel il y a un changement de concavité est appelé **point d'inflexion**.

Définition 13 : Épigraphe

La partie $\mathcal{E}(f)$ du plan située au dessus (au sens large) de la courbe de f s'appelle son **épigraphe**.

$$(x, y) \in \mathcal{E}(f) \iff y \geq f(x)$$



Voir exercice du TD : 26, 27, 28



2 Caractérisations

Ces caractérisations sont à visualiser sur des dessins!

Propriété 18 : Caractérisation avec l'épigraphe

f est convexe sur I si et seulement si son épigraphe $\mathcal{E}(f)$ est une partie convexe de \mathbb{R}^2 .



Voir exercice du TD : 23, 24

Propriété 19 : Caractérisations avec les pentes des cordes

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) f est convexe sur I .

(ii) **Inégalité des trois cordes** : si $x, y, z \in I$, $x < y < z$,

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y}$$

(iii) **Croissance des pentes** : pour tout $a \in I$,

$$\tau_a : \begin{cases} I \setminus \{a\} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \end{cases} \text{ est croissante}$$

Démonstration

(i) \Rightarrow (ii) $y = (1 - t)x + tz \dots$

(ii) \Rightarrow (iii) Séparer trois cas suivant la position par rapport à a .

(iii) \Rightarrow (i) τ_x .

Exercice 4

Montrer qu'une fonction convexe sur I admet en chaque point de $\overset{\circ}{I}$ une dérivée à gauche et une dérivée à droite et en déduire que f est continue sur $\overset{\circ}{I}$.

Est-ce le cas sur I ?



Voir exercice du TD : 35, 36, 37

3 Cas des fonctions dérivables

Propriété 20 : Caractérisation avec la dérivée

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur I .

f est convexe si et seulement si f' est croissante sur I .

Démonstration

Si f est convexe, dans l'inégalité des trois cordes, faire tendre z vers x à gauche puis vers y à droite. Si f' est croissante, dériver $\varphi : z \mapsto f((1-t)z + ty) - (1-t)f(z) - tf(y)$ sur $[x, y]$. ■

Corollaire 5 : Caractérisation avec la dérivée seconde

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable sur I .
 f est convexe (respectivement concave) si et seulement si $f'' \geq 0$ (respectivement $f'' \leq 0$) sur I .

Propriété 21 : Caractérisation avec les tangentes

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur I .
 f est convexe (respectivement concave) si et seulement si son graphe est au-dessus (respectivement au dessous) de toutes ses tangentes.

Démonstration

- Si la courbe de f est au dessus de ses tangentes, posons $x < y$. Soit $t \in]0, 1[$, $z = (1-t)x + ty$ et donc $t = \frac{z-x}{y-x}$, le fait que la courbe de f est au dessus de la tangente en z , d'équation $Y = f'(z)(X-z) + f(z)$ se traduit par $f(x) \geq f'(z)(x-z) + f(z)$ et $f(y) \geq f'(z)(y-z) + f(z)$ ce qui donne

$$(y-z)(f(z) - f(x)) \leq (z-x)(y-z)f'(z) \leq (z-x)(f(y) - f(z))$$

(avec $z-x < 0$ et $y-z > 0$) et donc $(y-x)f(z) \leq (y-z)f(x) + (z-x)f(y)$ et enfin $f(z) \leq (1-t)f(x) + tf(y)$.

- Si f est convexe et dérivable, pour $a \in I$, on veut montrer que pour tout $x \in I$, $f(x) \geq f'(a)(x-a) + f(a)$. Pour cela, on pose $\varphi_a : x \in I \mapsto f(x) - f'(a)(x-a)$, dérivable sur I , de dérivée $\varphi'_a : x \mapsto f'(x) - f'(a)$. Par croissance de f' , φ_a est décroissante avant a et croissante après, donc admet un minimum en a , avec $\varphi_a(a) = f(a)$, ce qui permet bien de trouver l'inégalité voulue. ■

4 Inégalités de convexité

Propriété 22 : Inégalité de Jensen

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $n \geq 1$, $(x_1, \dots, x_n) \in I^n$, $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in [0, 1]^n$ tel que $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$.

- Si f est convexe, $f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$.
- Si f est concave, $f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \geq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$.

Démonstration

Cas f convexe. Récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$, on pose P_n : « pour tous $(x_1, \dots, x_n) \in I^n$, $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in [0, 1]^n$ tel que $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$,

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$$

Initialisation : rien à faire pour $n = 1$. Pour $n = 2$, c'est la définition d'une fonction convexe.

Hérédité : Soit un $n \in \mathbb{N}^*$ pour lequel P_n est vraie et soient $(x_1, \dots, x_{n+1}) \in I^{n+1}$ et $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}) \in [0, 1]^{n+1}$ tel que $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$.

Si $\lambda_{n+1} = 1$, alors tous les autres λ_i sont nuls et il n'y a rien à faire.



Sinon, $\lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 - \lambda_{n+1} \neq 0$, on pose $x = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$. Alors

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i + \lambda_{n+1} x_{n+1} = \lambda x + \lambda_{n+1} x_{n+1} = (1 - \lambda_{n+1})x + \lambda_{n+1} x_{n+1}$$

Alors, par définition de la convexité, puis par HR, comme les $\mu_i = \frac{\lambda_i}{\lambda}$ sont positifs de somme 1,

$$f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i\right) \leq (1 - \lambda_{n+1})f(x) + \lambda_{n+1}f(x_{n+1}) \leq \lambda \sum_{i=1}^n \mu_i f(x_i) + \lambda_{n+1}f(x_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i f(x_i).$$

ce qui établit la récurrence.

Remarque

R42 – Se rencontre souvent avec des poids tous égaux à $\frac{1}{n}$, ce qui donne $f\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i\right) \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i)$.

Exemple : Très classiques

E9 – Inégalité arithmético-géométrique : pour tout $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}_*^+$, $\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$. Qu'obtient-on en remplaçant x_i par $\frac{1}{x_i}$?

E10 – $\forall x > -1, \ln(1+x) \leq x$.

$\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq 1+x$.

E11 – $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x$.



Voir exercice du TD : 29, 30, 31, 32, 34

IV

INTÉGRATION SUR UN SEGMENT D'UNE FONCTION CONTINUE PAR MORCEAUX

1 Définition et propriétés

L'idée de la construction de l'intégrale d'une fonction continue par morceau consiste à commencer par définir celle de fonctions en escalier (somme des aires des rectangles) puis grâce au fait que toute fonction continue par morceaux est limite uniforme d'une suite de fonctions en escalier, d'en déduire que si $f \in \mathcal{C}_m([a, b], \mathbb{R})$, $\left\{ \int_{[a, b]} \varphi ; \varphi \in \mathcal{E}([a, b]), \varphi \leq f \right\}$ et $\left\{ \int_{[a, b]} \psi ; \psi \in \mathcal{E}([a, b]), \psi \geq f \right\}$ admettent respectivement une borne supérieure et inférieure, égales. On a alors la définition :

Définition 14 : Intégrale d'une fonction continue par morceaux

Soit $f \in \mathcal{C}_m([a, b], \mathbb{R})$. On définit

$$\int_{[a, b]} f = \sup_{\varphi \in \mathcal{E}([a, b]), \varphi \leq f} \int_{[a, b]} \varphi = \inf_{\psi \in \mathcal{E}([a, b]), \psi \geq f} \int_{[a, b]} \psi.$$

Soit $f \in \mathcal{C}_m([a, b], \mathbb{C})$. Alors $\Re f \in \mathcal{C}_m([a, b], \mathbb{R})$, $\Im f \in \mathcal{C}_m([a, b], \mathbb{R})$ et on pose

$$\int_{[a, b]} f = \int_{[a, b]} \Re f + i \int_{[a, b]} \Im f$$

La première définition a un intérêt uniquement théorique.

Notation 1

Pour $f \in \mathcal{C}_m([a, b])$, on note $\int_a^b f = \int_{[a, b]} f$, $\int_b^a f = -\int_a^b f = -\int_{[a, b]} f$ et $\int_a^a f = 0$.

On note aussi $\int_a^b f = \int_a^b f(t) dt$.

Propriété 23 : de l'intégrale sur un segment d'une fonction CPM

Si I intervalle, $a, b \in I$ (non nécessairement ordonnés),

(i) $\left. \begin{array}{l} \mathcal{C}_m(I) \rightarrow \mathbb{K} \\ f \rightarrow \int_a^b f \end{array} \right\} \text{ est linéaire.}$

(ii) Si $a \leq b, f \leq g \implies \int_a^b f \leq \int_a^b g$.

Si $b \leq a, f \leq g \implies \int_a^b f \geq \int_a^b g$.

(iii) \triangle En général, si $a, b \in I$ et $f \in \mathcal{C}_m(I)$,

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \left| \int_a^b |f| \right|$$

(iv) Si $a, b, c \in I$ et $f \in \mathcal{C}_m(I)$, $\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f$.

Propriété 24 : Positivité améliorée (appellation non officielle)

Si f est **continue** sur $[a, b]$ et **de signe constant**,

$$\int_a^b f = 0 \iff f \equiv 0 \text{ sur } [a, b]$$

C'est faux si f est seulement continue par morceaux.



Voir exercice du TD : 40 à 45

Propriété 25 : Inégalité de Cauchy-Schwarz

Si $f, g \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$,

$$\left(\int_a^b fg \right)^2 \leq \int_a^b f^2 \int_a^b g^2$$

avec égalité si et seulement si (f, g) est liée.

Exercice 5 : CCINP 76

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel muni d'un produit scalaire noté (\cdot, \cdot) .

On pose $\forall x \in E, \|x\| = \sqrt{(x|x)}$.

1. (a) Énoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

(b) Dans quel cas a-t-on égalité ? Le démontrer.

2. Soit $E = \{f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}), \forall x \in [a, b] f(x) > 0\}$.

Prouver que l'ensemble $\left\{ \int_a^b f(t) dt \times \int_a^b \frac{1}{f(t)} dt, f \in E \right\}$ admet une borne inférieure m et déterminer la valeur de m .



1. (a) Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel muni d'un produit scalaire noté (\cdot) .

On pose $\forall x \in E, \|x\| = \sqrt{(x|x)}$.

Inégalité de Cauchy-Schwarz : $\forall (x, y) \in E^2, |(x|y)| \leq \|x\| \|y\|$

Preuve :

Soit $(x, y) \in E^2$. Posons $\forall \lambda \in \mathbb{R}, P(\lambda) = \|x + \lambda y\|^2$.

On remarque que $\forall \lambda \in \mathbb{R}, P(\lambda) \geq 0$.

De plus, $P(\lambda) = (x + \lambda y|x + \lambda y)$.

Donc, par bilinéarité et symétrie de (\cdot) , $P(\lambda) = \|y\|^2 \lambda^2 + 2\lambda(x|y) + \|x\|^2$.

On remarque que $P(\lambda)$ est un trinôme en λ si et seulement si $\|y\|^2 \neq 0$.

Premier cas : si $y = 0$

Alors $|(x|y)| = 0$ et $\|x\| \|y\| = 0$ donc l'inégalité de Cauchy-Schwarz est vérifiée.

Deuxième cas : $y \neq 0$

Alors $\|y\| = \sqrt{(y|y)} \neq 0$ car $y \neq 0$ et (\cdot) est une forme bilinéaire symétrique définie positive.

Donc, P est un trinôme du second degré en λ qui est positif ou nul.

On en déduit que le discriminant réduit Δ est négatif ou nul.

Or $\Delta = (x|y)^2 - \|x\|^2 \|y\|^2$ donc $(x|y)^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2$.

Et donc, $|(x|y)| \leq \|x\| \|y\|$.

- (b) On reprend les notations de 1. .

Prouvons que $\forall (x, y) \in E^2, |(x|y)| = \|x\| \|y\| \iff x$ et y sont colinéaires.

Supposons que $|(x|y)| = \|x\| \|y\|$.

Premier cas : si $y = 0$

Alors x et y sont colinéaires.

Deuxième cas : si $y \neq 0$

Alors le discriminant de P est nul et donc P admet une racine double λ_0 .

C'est-à-dire $P(\lambda_0) = 0$ et comme (\cdot) est définie positive, alors $x + \lambda_0 y = 0$.

Donc x et y sont colinéaires.

Supposons que x et y soient colinéaires.

Alors $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ tel que $x = \alpha y$ ou $y = \alpha x$.

Supposons par exemple que $x = \alpha y$ (raisonnement similaire pour l'autre cas).

$|(x|y)| = |\alpha| \cdot |(y|y)| = |\alpha| \|y\|^2$ et $\|x\| \|y\| = \sqrt{(\alpha y|\alpha y)} \|y\| = \sqrt{\alpha^2 (y|y)} \|y\| = |\alpha| \cdot \|y\|^2$.

Donc, on a bien l'égalité.

2. On considère le produit scalaire classique sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ défini par :

$$\forall (f, g) \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}), (f|g) = \int_a^b f(t)g(t) dt.$$

$$\text{On pose } A = \left\{ \int_a^b f(t) dt \times \int_a^b \frac{1}{f(t)} dt, f \in E \right\}.$$

$A \subset \mathbb{R}$.

$A \neq \emptyset$ car $(b-a)^2 \in A$ (valeur obtenue pour la fonction $t \mapsto 1$ de E).

De plus, $\forall f \in E, \int_a^b f(t) dt \times \int_a^b \frac{1}{f(t)} dt \geq 0$ donc A est minorée par 0.

On en déduit que A admet une borne inférieure et on pose $m = \inf A$.

Soit $f \in E$.

On considère la quantité $\left(\int_a^b \sqrt{f(t)} \frac{1}{\sqrt{f(t)}} dt \right)^2$.

D'une part, $\left(\int_a^b \sqrt{f(t)} \frac{1}{\sqrt{f(t)}} dt \right)^2 = \left(\int_a^b 1 dt \right)^2 = (b-a)^2$.

D'autre part, si on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour le produit scalaire (\cdot) on obtient :

$$\left(\int_a^b \sqrt{f(t)} \frac{1}{\sqrt{f(t)}} dt \right)^2 \leq \int_a^b f(t) dt \int_a^b \frac{1}{f(t)} dt.$$

On en déduit que $\forall f \in E, \int_a^b f(t) dt \int_a^b \frac{1}{f(t)} dt \geq (b-a)^2$.

Donc $m \geq (b-a)^2$.

Et, si on considère la fonction $f : t \mapsto 1$ de E , alors $\int_a^b f(t) dt \int_a^b \frac{1}{f(t)} dt = (b-a)^2$.

Donc $m = (b-a)^2$.

Exercice 6 : CCINP 79

Soit a et b deux réels tels que $a < b$.

1. Soit h une fonction continue et positive de $[a, b]$ dans \mathbb{R} .

Démontrer que $\int_a^b h(x)dx = 0 \implies h = 0$.

2. Soit E le \mathbb{R} -espace vectoriel des fonctions continues de $[a, b]$ dans \mathbb{R} .

On pose : $\forall (f, g) \in E^2, (f|g) = \int_a^b f(x)g(x)dx$.

Démontrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E .

3. Majorer $\int_0^1 \sqrt{x}e^{-x}dx$ en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

1. Soit h une fonction continue et positive de $[a, b]$ dans \mathbb{R} telle que $\int_a^b h(x)dx = 0$.

On pose $\forall x \in [a, b], F(x) = \int_a^x h(t)dt$.

h est continue sur $[a, b]$ donc F est dérivable sur $[a, b]$.

De plus, $\forall x \in [a, b], F'(x) = h(x)$.

Or h est positive sur $[a, b]$ donc F est croissante sur $[a, b]$. (*)

Or $F(a) = 0$ et, par hypothèse, $F(b) = 0$. C'est-à-dire $F(a) = F(b)$. (**)

D'après (*) et (**), F est constante sur $[a, b]$.

Donc $\forall x \in [a, b], F'(x) = 0$.

C'est-à-dire, $\forall x \in [a, b], h(x) = 0$.

2. On pose $\forall (f, g) \in E^2, (f|g) = \int_a^b f(x)g(x)dx$.

Par linéarité de l'intégrale, (|) est linéaire par rapport à sa première variable.

Par commutativité du produit sur \mathbb{R} , (|) est symétrique.

On en déduit que (|) est une forme bilinéaire symétrique. (*)

Soit $f \in E, (f|f) = \int_a^b f^2(x)dx$.

Or $x \mapsto f^2(x)$ est positive sur $[a, b]$ et $a < b$ donc $(f|f) \geq 0$.

Donc (|) est positive. (**)

Soit $f \in E$ telle que $(f|f) = 0$.

Alors $\int_a^b f^2(x)dx = 0$.

Or $x \mapsto f^2(x)$ est positive et continue sur $[a, b]$.

Donc, d'après 1., f est nulle sur $[a, b]$.

Donc (|) est définie. (***)

D'après (*), (**) et (***), (|) est un produit scalaire sur E .

3. L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne $\int_0^1 \sqrt{x}e^{-x} dx \leq \sqrt{\int_0^1 x dx} \sqrt{\int_0^1 e^{-2x} dx} = \frac{\sqrt{1-e^{-2}}}{2}$.

2 Sommes de Riemann

Définition 15 : Sommes de Riemann

Soit $f \in \mathcal{C}_m([a, b])$, $\sigma = (a_0, \dots, a_n)$ subdivision de $[a, b]$ et pour $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \xi_k \in [a_k, a_{k+1}]$. On appelle **somme de Riemann associée à f, σ et $(\xi_k)_k$** :

$$S(f, \sigma, \xi) = \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) f(\xi_k)$$

**Théorème 13 : Convergence des sommes de Riemann**

Soit $f \in \mathcal{C}_m([a, b])$.

(i) $h(\sigma)$ désignant le pas de σ ,

$$S(f, \sigma, \xi) \xrightarrow{h(\sigma) \rightarrow 0} \int_a^b f.$$

(ii) Si, de plus, f est K -lipschitzienne,

$$\left| S(f, \sigma, \xi) - \int_a^b f \right| \leq K(b-a)h(\sigma).$$

Démonstration

- On fait une première démonstration dans le cas où f est continue sur $[a, b]$. Elle y est donc uniformément continue en vertu du théorème de Heine.

Soit $\varepsilon > 0$, on a $\eta > 0$ tel que $|x - y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}$.

Soit $S(f, \sigma, \xi) = \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) f(\xi_k)$ une somme de Riemann sur une subdivision σ de pas $h \leq \eta$.

$$\begin{aligned} \left| S(f, \sigma, \xi) - \int_a^b f \right| &= \left| \sum_{k=0}^{n-1} \left((a_{k+1} - a_k) f(\xi_k) - \int_{a_k}^{a_{k+1}} f \right) \right| = \left| \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} (f(\xi_k) - f(x)) dx \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} |f(\xi_k) - f(x)| dx \end{aligned}$$

par inégalité triangulaire. Pour $x, \xi_k \in [a_k, a_{k+1}]$, $|\xi_k - x| \leq |a_{k+1} - a_k| \leq h \leq \eta$ donc $|f(\xi_k) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}$. Ainsi,

$$\left| S(f, \sigma, \xi) - \int_a^b f \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) \frac{\varepsilon}{b-a} = \varepsilon$$

On a démontré que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall \sigma, \xi, h(\sigma) \leq \eta \Rightarrow \left| S(f, \sigma, \xi) - \int_a^b f \right| \leq \varepsilon.$$

- Si f est K -lipschitzienne (c'est le cas si f est \mathcal{C}^1 par exemple), le calcul est plus simple :

$$\begin{aligned} \left| S(f, \sigma, \xi) - \int_a^b f \right| &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} |f(\xi_k) - f(x)| dx \leq K \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} |\xi_k - x| dx \\ &\leq Kh(\sigma) \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) = Kh(\sigma)(b-a) \end{aligned}$$

ce qui permet aussi de retrouver le résultat précédent.

- Voici finalement une démonstration dans le cas général où f est seulement continue par morceaux. L'idée est de montrer le résultat d'abord pour une fonction indicatrice de segment, puis, par linéarité, de l'étendre aux fonctions en escalier, puis, par approximation uniforme, aux fonctions continues par morceaux.

Soit $[c, d]$ un segment inclus dans $[a, b]$ et $f = \mathbb{1}_{[c, d]}$.

Si $[c, d]$ ne contient aucun des ξ_i , $\left| S(f, \sigma, \xi) - \int_a^b f \right| = d - c \leq 2h(\sigma)$ (deux ξ_i successifs sont distant d'au plus $2h(\sigma)$).

Sinon, traitons le cas où $a < c \leq d < b$. On peut adapter le raisonnements pour les cas où $a = c$ ou $b = d$.

On a des entiers i et j éventuellement confondus tels que

$$a_{i-1} \leq \xi_{i-1} < c \leq \xi_i \leq \xi_j \leq d < \xi_{j+1} \leq a_{j+2}.$$

Alors $S(f, \sigma, \xi) = a_{j+1} - a_i \leq a_{j+2} - a_{i-1}$ et

$$a_{j+2} - a_{i-1} = (a_{j+2} - \xi_{j+1}) + (\xi_{j+1} - d) + (d - c) + (c - \xi_{i-1}) + (\xi_{i-1} - a_{i-1}) \leq h(\sigma) + 2h(\sigma) + \int_a^b f + 2h(\sigma) + h(\sigma) = \int_a^b f + 6h(\sigma)$$

Donc $S(f, \sigma, \xi) - \int_a^b f \leq 6h(\sigma)$ d'une part, et

$$S(f, \sigma, \xi) - \int_a^b f = (a_{j+1} - a_i) - (d - c) \geq (a_{j+1} - a_i) - (a_{j+2} - a_{i-1}) = -(a_i - a_{i-1}) - (a_{j+2} - a_{j+1}) \geq -2h(\sigma)$$

Donc $\left| S(f, \sigma, \xi) - \int_a^b f \right| \leq 6h(\sigma)$, majoration encore valable dans le premier cas.

On en déduit bien que pour $f = \mathbb{1}_{[c,d]}$, $S(f, \sigma, \xi) \xrightarrow{h(\sigma) \rightarrow 0} \int_a^b f$.

Ensuite, par combinaison linéaire, le résultat se transmet aux fonctions en escalier.

Enfin, si f est continue par morceaux sur $[a, b]$, et $\varepsilon > 0$, par approximation uniforme des fonctions continues par morceaux par des fonctions en escalier, on a fonction φ en escalier sur $[a, b]$ telle que $\|f - \varphi\|_\infty \leq \varepsilon_0 = \frac{\varepsilon}{4(b-a)}$,

et on a $\eta > 0$ tel que si $h(\sigma) \leq \eta$, $\left| S(\varphi, \sigma, \xi) - \int_a^b \varphi \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Alors, si $h(\sigma) \leq \eta$,

$$\begin{aligned} \left| S(f, \sigma, \xi) - \int_a^b f \right| &= \left| S(f, \sigma, \xi) - S(\varphi, \sigma, \xi) + S(\varphi, \sigma, \xi) - \int_a^b \varphi + \int_a^b \varphi - \int_a^b f \right| \\ &\leq |S(f - \varphi, \sigma, \xi)| + \left| S(\varphi, \sigma, \xi) - \int_a^b \varphi \right| + \left| \int_a^b (\varphi - f) \right| \\ &\leq 2(b-a)\varepsilon_0 + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Corollaire 6 : Cas simples

Si f est continue par morceaux sur $[a, b]$, $a < b$,

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f.$$

En particulier, si $a = 0$ et $b = 1$, $f \in \mathcal{C}_m([0, 1])$,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f.$$

Remarque

R43 – À cause du $\frac{1}{n}$, ajouter ou enlever un nombre fini de termes dans la somme ne change pas sa limite.

$$\frac{1}{n} \sum_{\substack{k=0 \text{ ou } 1 \text{ ou } 25 \\ n-1 \text{ ou } n-2 \text{ ou } n+12}} f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f.$$

Exercice 7

Limite de $\sum_{j=n+1}^{2n} \frac{1}{j}$. Retrouver la nature de la série harmonique.

Exercice 8

Calculer $I(x) = \int_0^{2\pi} \ln(x^2 - 2x \cos t + 1) dt$ pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.



Voir exercice du TD : 48 à 50

3 Intégrale et primitive

**Propriété 26 : Constante de primitivation**

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{K}$, F, G deux primitives de f sur I , avec I **intervalle**.
Alors on a $C \in \mathbb{K}$ tel que $\forall x \in I, F(x) = G(x) + C$.

Théorème 14 : fondamental de l'Analyse

Si f est continue sur un intervalle I et $a \in I$, $F : x \mapsto \int_a^x f$ est l'unique primitive de f qui s'annule en a .

Corollaire 7 : du théorème fondamental

(i) Toute fonction continue sur un intervalle possède des primitives.

(ii) Si $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$, F primitive de f sur I , $a, b \in I$,

$$\int_a^b f(t) dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$$

(iii) Si f est de classe $\mathcal{C}^1([a, b])$, $f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t) dt$.

(iv) **Inégalité des accroissements finis** : Si f est de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, b]$ et f' bornée par k , alors f est k -lipschitzienne sur $[a, b]$.

Propriété 27 : Fonction intégrale dépendant de ses bornes

Soient I, J intervalles de \mathbb{R} , $u, v : I \rightarrow J$ dérivables, $f : J \rightarrow \mathbb{K}$ continue.

L'application $\varphi : \begin{cases} I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longrightarrow & \int_{u(x)}^{v(x)} f(t) dt \end{cases}$ est dérivable sur I et

$$\forall x \in I, \varphi'(x) = v'(x)f(v(x)) - u'(x)f(u(x)).$$

Exercice 9 : Ex CCINP 56

On considère la fonction H définie sur $]1, +\infty[$ par $H(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$.

1. Montrer que H est C^1 sur $]1, +\infty[$ et calculer sa dérivée.

2. Montrer que la fonction u définie par $u(x) = \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}$ admet une limite finie en $x=1$.

3. En utilisant la fonction u de la question 2., calculer la limite en 1^+ de la fonction H .



Voir exercice du TD : 46, 47

Propriété 28 : Intégration par parties

Si u, v sont de classe \mathcal{C}^1 sur I ,

$$\forall a, b \in I, \int_a^b u(t)v'(t) dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t) dt$$

Exercice 10

Équivalent de $f(x) = \int_1^x e^t \ln t \, dt$ en $+\infty$.

$$f(x) = e^x \ln x - \int_1^x \frac{e^t}{t} \, dt \text{ et si } x \geq 1, 0 \leq \int_1^x \frac{e^t}{t} \, dt \leq e^x - e = o(e^x \ln x).$$

Propriété 29 : Changement de variable

Si I intervalle, $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow I$ de classe \mathcal{C}^1 , f continue sur I ,

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t) \, dt = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(u)) \varphi'(u) \, du.$$

4 Calcul de primitives et d'intégrales**Méthode 1 : Technique de calcul de primitives et d'intégrales****a** **Calculs directs**

Il est bien entendu indispensable de connaître ses primitives usuelles (cf formulaire).

On reconnaît souvent une forme $u' \times v'(u)$ qui s'intègre en $v \circ u$ (voir aussi le changement de variable)

On peut parfois passer par les complexes : par définition, la partie réelle (imaginaire) de la primitive est la primitive de la partie réelle (imaginaire).

b **L'intégration par parties**

Fonction dont la dérivée est plus simple... ...comme par exemple les fonctions $\ln, \text{Arccos}, \text{Arcsin}, \text{Arctan}$, etc.

Exercice 11

Calculer $\int \ln x \, dx$.

Abaissement du degré, formule de récurrence**Exercice 12**

Calculer $F_n(x) = \int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^n} \, dt$.

c **Le changement de variable**

On veut calculer $\int f(\varphi(t)) \varphi'(t) \, dt$: C'est en fait le cas où on reconnaît une forme $\varphi' \times f \circ \varphi$.

On veut calculer $\int f(x) \, dx$

Dans ce cas, il faut écrire $x = \varphi(t)$ avec φ de classe \mathcal{C}^1 . Mais attention, si on fait un calcul de primitive, il faudra choisir φ **bijjective** pour pouvoir à la fin du calcul revenir de t à x ($t = \varphi^{-1}(x)$). Si c'est un calcul d'intégrale avec des bornes, φ n'a pas besoin d'être bijective ! (on en revient pas à la première variable.)

Comment déterminer un bon changement de variable ? Pas toujours facile, mais voici quelques tuyaux pour y parvenir.

d **Les fractions rationnelles**

Parfois, un simple changement de variable, ou des astuces du type $+1-1$ permettent de calculer les primitives.

Si ce n'est pas possible de simplifier « à vue », l'idée est de se ramener à des fractions simples pour utiliser, si $a \in \mathbb{R}$, sur $]a, +\infty[$ ou $]-\infty, a[$ et $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int \frac{1}{(x-a)^n} \, dx = \frac{-1}{(n-1)(x-a)^{n-1}} + C \text{ si } n \neq 1$$



$$\int \frac{1}{x-a} dx = \ln|t-a| + C.$$

Pour se faire on procède à une **décomposition en éléments simples**. Ne pas oublier la partie entière si elle est non nulle.

Il y a un autre cas à traiter : c'est celui pour lequel on obtient un facteur ax^2+bx+c au dénominateur sans racine réelle : cela donne dans la décomposition un terme en $\frac{\alpha x + \beta}{ax^2 + bx + c}$, qui se primitive en \ln et Arctan :

- On se débarrasse du x au numérateur en faisant apparaître la dérivée $2ax+b$ du dénominateur et on intègre en \ln ,
- on met sous forme canonique le dénominateur du terme restant et on intègre en Arctan .

e Les fonctions trigonométriques

Si on veut intégrer une fonction polynomiale en $\cos x$ et $\sin x$, le plus simple est de linéariser. Cependant, si on a un terme en $\sin^p x \cos^q x$ avec p ou q impair, on peut poser $t = \cos x$ si q est impair et $t = \sin x$ si p est impaire en utilisant $\cos^2 + \sin^2 = 1$.

Si on veut intégrer une fraction rationnelle en $\cos x$ et $\sin x$, on applique :

Règles de Bioche

Si « $f(x)dx$ » est invariant par

- $x \mapsto -x$, on pose $t = \cos x$;
- $x \mapsto \pi - x$, on pose $t = \sin x$;
- $x \mapsto \pi + x$, on pose $t = \tan x$;
- Sinon on pose $t = \tan \frac{x}{2}$.

Ne pas oublier le dx !!

Exercice 13

Calculer $I = \int_0^{\pi/2} \sin^5 t dt$.

Exercice 14

$\int \frac{1}{\cos x} dx$.

f Les fonctions hyperboliques

Pour les fonctions faisant intervenir ch , sh , th et \exp , on peut poser $t = e^x$ ($\text{ch } x = \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{t} \right)$, $\text{sh } x = \frac{1}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right)$, $\text{th}(x) = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}$.)

Si l'on a une fraction rationnelle en ch , sh , th , il peut être plus efficace d'appliquer un changement de variable obtenu grâce aux règles de Bioche appliquées à la fraction rationnelle dans laquelle on aura remplacé mentalement ch , sh , th par \cos , \sin , \tan respectivement.

g Les fonctions avec radical

- Si l'on souhaite intégrer une fraction rationnelle en x et $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ (x et $\sqrt{ax+b}$ en particulier), on pose $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$.
- Si l'on souhaite intégrer une fraction rationnelle en x et $\sqrt{ax^2+bx+c}$ ($a \neq 0$), il faut mettre ce dernier sous forme canonique pour obtenir du $\sqrt{\pm(ax+\beta)^2 \pm 1}$ puis poser $t = ax + \beta$. Ensuite, pour :
 - * $\sqrt{t^2+1}$ on pose $t = \text{sh } u$ ($\text{sh}^2 + 1 = \text{ch}^2$) ou $t = \tan u$ ($1 + \tan^2 = \frac{1}{\cos^2}$, attention à l'intervalle dans ce cas là.)
 - * $\sqrt{t^2-1}$ on pose $t = \pm \text{ch } u$ suivant le signe de t . ($\text{ch}^2 - 1 = \text{sh}^2$.)
 - * $\sqrt{1-t^2}$ on pose $t = \sin u$ ou $t = \cos u$ ($1 - \cos^2 = \sin^2$ et $1 - \sin^2 = \cos^2$.)

Exercice 15

$$\int \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} dx.$$



Voir exercice du TD : 38, 39

5 Formules de Taylor

Définition 16

Si f est n fois dérivable en a , son **développement de Taylor** en a à l'ordre n est

$$T_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n,$$

et le **reste de Taylor** de f en a à l'ordre n est $R_n = f - T_n$ (tel que $f = T_n + R_n$).

On sait déjà que si f est polynomiale de degré d , pour tout $n \geq d+1$, $R_n \equiv 0$.
On va chercher à :

- exprimer **globalement** R_n : c'est la formule de Taylor avec reste intégral,
- majorer **globalement** R_n : c'est l'inégalité de Taylor-Lagrange,
- dominer **localement** R_n : c'est la formule de Taylor-Young.

a

Taylor reste intégrale

Propriété 30 : Formule de Taylor avec reste intégral

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ telle que f **est de classe** \mathcal{C}^{n+1} **sur** I , $a \in I$. Pour tout $x \in I$,

$$R_n(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$$

ie

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.$$

Remarque

R44 – À connaître **PARFAITEMENT**.

Pour s'en rappeler : tester pour $n=0$ et plus de a sous l'intégrale.

b

Inégalité de Taylor-Lagrange

Propriété 31 : Inégalité de Taylor-Lagrange

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ telle que f **est de classe** \mathcal{C}^{n+1} **sur** I , $a \in I$. Pour tout $x \in I$,

$$|R_n(x)| = \left| f(x) - \left(f(a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \right) \right| \leq \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{t \in [a,x]} |f^{(n+1)}(t)|.$$

**Remarque**

R45 – Facile, plus de piège. Que retrouve-t-on pour $p = 0$?

**Formule de Taylor-Young****Propriété 32 : Primitivation de DL**

Soit $f : I \rightarrow E$ admettant un $DL_n(a)$ avec $a \in I$

$$f(x) = a_0 + \dots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$$

Toute primitive F de f sur I admet un $DL_{n+1}(a)$

$$F(x) = \boxed{F(a)} + a_0(x-a) + \frac{a_1}{2}(x-a)^2 + \dots + \frac{a_n}{n+1}(x-a)^{n+1} + o((x-a)^{n+1})$$

obtenu par primitivation terme à terme du DL de f .

Remarque

R46 – On peut aussi dériver un DL terme à terme **à condition de savoir que f' admet un DL.**

Propriété 33 : Formule de Taylor-Young

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ telle que f **est de classe \mathcal{C}^n sur I** , $a \in I$.

$$R_n(x) = o_{x \rightarrow a}((x-a)^n)$$

ie

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o_{x \rightarrow a}((x-a)^n).$$

Remarque

R47 – L'hypothèse du programme officiel est f de classe \mathcal{C}^n , mais il suffit qu'elle soit $n-1$ fois dérivable et que $f^{(n-1)}$ soit dérivable en a .



Voir exercice du TD : 51, 52, 53