9

Réduction 1re partie : point de vue géométrique

Dans tout le chapitre, $(E,+,\cdot)$ désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel où $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$, mais se généralise au cas d'un corps quelconque, avec la prudence pour certains résultats de devoir travailler dans un corps de caractéristique nulle ($\forall n \in \mathbb{N}^*,\ n1_{\mathbb{K}} \neq 0_{\mathbb{K}}$.)

I Sous-espaces stables

1 Point de vue géométrique

Définition 1 : Sous-espace stable, endomorphisme induit

Si $u \in \mathscr{L}(E)$ et F est un sous-espace vectoriel de E, F est dit **stable par** u lorsque

$u(F) \subset F$ i.e $\forall x \in F,\ u(x) \in F$

Lorsque c'est le cas, u induit un endomorphisme sur F

$$u_F : \left| \begin{array}{l} F \longrightarrow F \\ x \longmapsto u_F(x) = u(x) \end{array} \right. \qquad u_F \in \mathscr{L}(F)$$

Exemple

E 1 – $\{0_E\}$ et E sont stables par u.

Remarque

R 1 – $u_F \neq u_{|F}$.

$$u_F : \left| \begin{array}{l} F \longrightarrow F \\ x \longmapsto u(x) \end{array} \right. \qquad u_{|F} : \left| \begin{array}{l} F \longrightarrow E \\ x \longmapsto u(x) \end{array} \right.$$

Propriété 1 : Caractérisation de la stabilité par une base

Si F est de dimension finie $p > 0$, $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de F, alors F est stable par u si et seulement si $\forall i \in [\![1, p]\!],\ u(e_i) \in F$

(encore vrai avec une famille seulement génératrice.)

Propriété 2 : Commutation et stabilité d'image et noyau

Si $u, v \in \mathscr{L}(E)$ commutent, l'image et le noyau de l'un sont stables par l'autre.

cf TD alg. linéaire.

2 Point de vue matriciel

Soit M écrite par blocs $M = \begin{array}{cc} \overset{F}{\leftrightarrow} & \overset{G}{\leftrightarrow} \\ p & q \end{array}$ $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{array}{l} p \updownarrow F \\ q \updownarrow G \end{array} \in \mathscr{M}_{p+q}(\mathbb{K})$.

Si $u \in \mathscr{L}(E)$ est représenté par M dans une base $\mathscr{B}$, alors on peut séparer $\mathscr{B}$ de taille $p+q$ en deux sous-familles :

- les p premiers vecteurs engendrant un sous-espace F de E
- les q derniers vecteurs engendrant un sous-espace G.

Alors F et G sont supplémentaires de E ($F \oplus G = E$.)

De plus, si $x \in E$, x_F et x_G ses composantes sur F et G (donc $x = x_F + x_G$), x est représenté dans $\mathscr{B}$ par $X = \begin{pmatrix} X_F \\ X_G \end{pmatrix} \begin{array}{l} \updownarrow p \\ \updownarrow q \end{array}$ où X_F et X_G représentent x_F et x_G. Alors $u(x)$ est représenté dans $\mathscr{B}$ par

$$MX = \begin{pmatrix} AX_F + BX_G \\ CX_F + DX_G \end{pmatrix} \begin{array}{l} \updownarrow p \\ \updownarrow q \end{array}$$

représentant respectivement les composantes sur F et G de $u(x)$.

Écrire X sous cette forme est une méthode classique de résolution de problèmes avec des matrices écrites par blocs.

Cela se généralise à un nombre quelconque de sous-espaces.

Exercice 1

Montrer que tout projection peut être représentée par un matrice de la forme $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et que toute symétrie peut être représentée par un matrice de la forme $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & -I_{n-r} \end{pmatrix}$.

Propriété 3 : Matrice par bloc et stabilité

Soit $E = F \oplus G$ et $\mathscr{B}$ une base adaptée à cette somme directe, $u \in \mathscr{L}(E)$, $\begin{array}{c|cc} & p & q \\ \hline p & A & B \\ q & C & D \end{array} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$.

$p = \dim F$
$q = \dim G$

- *F est stable par u si et seulement si* $C = 0_{q,p}$
- *G est stable par u si et seulement si* $B = 0_{p,q}$

Exemple

E 2 – Projections et symétries

Propriété 4 : Généralisation

Soit $E = \bigoplus_{i=1}^{r} E_i$ et $\mathscr{B}$ une base adaptée à cette somme directe, $u \in \mathscr{L}(E)$.

$A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ est diagonale par blocs ($A = \begin{pmatrix} A_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & A_r \end{pmatrix}$) si et seulement si chaque E_i est stable par u.

On peut alors considérer l'endomorphisme u_i induit par u sur E_i dont la matrice dans la base $\mathscr{B}_i$ (issue de $\mathscr{B}$) est A_i.

Remarque

R 2 – On retrouve le résultat classique qu'alors u est uniquement déterminé par la donnée des u_i.

Exercice 2

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

1. Soit $H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + 2z = 0\}$. Montrer que H est stable par u.
2. Soit $x = (3,2,1)$ et $D = \mathrm{Vect}(x)$. Montrer que D est stable par u.
3. Justifier que $\mathbb{R}^3 = D \oplus H$.
4. Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans la quelle la matrice de u est diagonale par blocs, à cœfficients entiers.

II Éléments propres d'un endomorphisme et d'une matrice carrée

1 Cas d'un endomorphisme

Remarque

R 3 – Si $u \in \mathscr{L}(E)$ et D droite de E, on a $a \neq 0_E$ tel que $D = \mathrm{Vect}\, a$. À quelle condition D est-elle stable par u ?

Définition 2 : Éléments propres d'un endomorphisme

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$.

- On appelle **valeur propre** de u tout $\lambda \in \mathbb{K}$ tel qu' il existe $x \in E$ non nul tel que $u(x) = \lambda x$.
- Un tel vecteur **non nul** est appelé **vecteur propre** associé à la valeur propre λ.

- On appelle **sous-espace propre** associé à la valeur propre λ le sous-espace

$$E_\lambda(u) = \{x \in E,\ u(x) = \lambda x\} = \operatorname{Ker}(u - \lambda \operatorname{id}_E)$$

- Si E est de dimension finie, l'ensemble des valeurs propres de u est appelé son **spectre**, noté $\operatorname{Sp} u$ ou $\operatorname{Sp}_{\mathbb{K}} u$.

Remarque

R 4 – λ est valeur propre de u ssi $\operatorname{Ker}(u-\lambda\operatorname{id}_E) \neq \{0_E\}$ ssi $u-\lambda\operatorname{id}_E$ non injectif.
En particulier, 0 est valeur propre de u ssi $\operatorname{Ker} u \neq \{0\}$
ssi u non injectif

R 5 – $E_\lambda(u)$ est constitué des vecteurs propres associés à λ **et** du vecteur nul.

Exemple

E 3 – $E = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ et $u : f \mapsto f'$.

E 4 – $E = \mathbb{R}[X]$ et $u : P \mapsto P'$.

E 5 – Homothétie $u = \lambda \operatorname{id}_E$.

E 6 – Projection p :

Propriété 5 : Droites stables

Les droites stables par u sont les droites engendrées par les vecteurs propres de u.

Propriété 6 : Stabilité de sous-espaces propres

Si $u, v \in \mathscr{L}(E)$ commutent, les sous-espaces propres de l'un sont stables par l'autre.

Propriété 7 : Des sous-espaces propres sont en somme directe

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ des valeurs propres de u deux à deux distinctes. Alors
les $E_{\lambda_i}(u)$ pour $i \in [\![1,p]\!]$ sont en somme directe.

Corollaire 1 : Des vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes sont libres

Des vecteurs propres de u associés à des valeurs propres deux à deux distinctes sont linéairement indépendants (forment une famille libre).

Exercice 3

Montrer que les familles $\left(x \mapsto e^{\lambda x}\right)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ **et** $(x \mapsto \cos(\lambda x))_{\lambda \in \mathbb{R}^+}$ **sont des familles libres.**

Corollaire 2 : Majoration du nombre de valeurs propres

Si E est de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E)$, alors

$$|\operatorname{Sp} u| \leq \dim E$$

Exercice 4 : CCINP 83

2 Cas d'une matrice

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Définition 3 : Éléments propres d'une matrice

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- On appelle **valeur propre** de A tout $\lambda \in \mathbb{K}$ tel qu'il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ NON NUL tel que $AX = \lambda X$
- Un tel vecteur **non nul** est appelé **vecteur propre** associé à la valeur propre λ.
- On appelle **sous-espace propre** associé à la valeur propre λ le sous-espace $E_\lambda(A) = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}),\ AX = \lambda X\} = \mathrm{Ker}(A - \lambda I_n)$
- L'ensemble des valeurs propres de A est appelé son **spectre**, noté $\mathrm{Sp}\, A$ ou $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}\, A$.

Remarque

R 6 – Les éléments propres d'une matrice sont ceux de l'application linéaire canoniquement associée (via la base canonique de $\mathbb{K}^n$).

R 7 – Si $\mathbb{K}$ sous-corps de $\mathbb{C}$, $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}\, A \subset \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}\, A$ car des vecteurs propres dans $\mathbb{K}$ sont en particulier des vecteurs propres dans $\mathbb{C}$.

Exemple

E 7 – $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Propriété 8 : Le spectre d'une matrice est le spectre des endomorphismes qu'elle représente

Si $(E, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$, $\mathcal{B}$ est une base de E, et $u \in \mathcal{L}(E)$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est A, alors $\mathrm{Sp}\, u = \mathrm{Sp}\, A$.

Et plus précisément les vecteurs propres et sous-espaces de A sont les représentations dans la base $\mathcal{B}$ de ceux de u.

3 Polynôme caractéristique

Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \neq 0$. Si $u \in \mathcal{L}(E)$,

$$\begin{aligned}
\lambda \in \mathrm{Sp}\, u &\iff \exists x \neq 0_E,\ u(x) = \lambda x \\
&\iff \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{id}_E) = E_\lambda(u) \neq \{0_E\} \\
&\iff u - \lambda \mathrm{id}_E \text{ non injectif} \\
&\overset{\dim E < +\infty}{\iff} u - \lambda \mathrm{id}_E \text{ non bijectif} \\
&\iff \lambda \mathrm{id}_E - u \notin \mathcal{GL}(E)
\end{aligned}$$

Propriété 9 : Valeur propre et déterminant

Si $u \in \mathcal{L}(E)$, $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de u si et seulement si

$$\det(\lambda \mathrm{id}_E - u) = 0$$

Remarque

R 8 – En dimension infinie, $u - \lambda \mathrm{id}_E \notin \mathcal{GL}(E) \not\Longrightarrow \lambda$ valeur propre de u, car $u - \lambda \mathrm{id}_E$ peut être injectif et non bijectif.

R 9 – En particulier, $u \in \mathcal{GL}(E)$ si et seulement si $0 \notin \mathrm{Sp}\, u$

De la même manière,

Propriété 10 : Version matricielle

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de A si et seulement si $A - \lambda I_n \notin \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ si et seulement si $\det(A - \lambda I_n) = 0$.

ssi $\lambda I_n - A \notin \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ ssi $\det(\lambda I_n - A) = 0$

Remarque

R 10 – En particulier, $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ si et seulement si $0 \notin \operatorname{Sp} A$.

Comme, pour $x \in \mathbb{K}$, $\det(xI_n - A) = (-1)^n \det(A - xI_n)$ est polynomial en x, on peut définir :

Définition 4 : Polynôme caractéristique

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ où E est de dimension finie.

- On appelle **polynôme caractéristique** de A le polynôme $\chi_A \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \ \ \chi_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A)$
- On appelle **polynôme caractéristique** de u le polynôme $\chi_u \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \ \ \chi_u(\lambda) = \det(\lambda \, id_E - u)$

Exemple

E 8 – Avec $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\chi_A = X^2 - 0 \times X + 1 = X^2 + 1$$

Propriété 11 : Valeurs propres d'une matrice triangulaire

Les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont

ses coefficients diagonaux.

Exercice 5

Montrer que A et A^{T} ont même polynôme caractéristique.

Propriété 12 : du polynômes caractéristique

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- *Les racines de χ_A (respectivement χ_u) sont exactement les valeurs propres de A (respectivement u).*
- *Si $\mathcal{B}$ base de E tel que $A = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$, alors $\chi_u = \chi_A$.*
- *χ_A est de degré n unitaire. Plus précisément,*

$$\chi_A = X^n - \operatorname{tr}(A) X^{n-1} + \dots + (-1)^n \det A$$

χ_u est de degré n unitaire. Plus précisément,

$$\chi_u = X^n - \operatorname{tr}(u) X^{n-1} + \dots + (-1)^n \det u$$

Remarque

R 11 – Les cœfficients se retrouvent facilement en considérant le cas d'une matrice triangulaire et en utilisant les relations cœfficients-racines.

R 12 – En dimension 2, on a immédiatement $\chi A = X^2 - \operatorname{tr}(A) X + \det A$

Propriété 13 : Invariants de similitude

Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique.

Propriété 14 : Polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et F sev de E stable par u

u_F l'endomorphisme induit par u sur F.

Alors $\chi_{u_F} \mid \chi_u$.

Théorème 1 : de Cayley-Hamilton

le polynôme caractéristique est un polynôme annulateur.

$\chi_A(A) = 0_n$ $\quad$ $\chi_u(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$

Exemple

E9 – Si $n=2$, $\chi_A = X^2 - (\mathrm{tr}\, A)X + \det A$

On a tjs $\boxed{A^2 - (\mathrm{tr}\, A)A + (\det A) I_2 = 0_2}$ si $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$

4 Multiplicité des valeurs propres

Soit $(E,+,\cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \neq 0$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $u \in \mathcal{L}(E)$.

Définition 5 : Multiplicité d'une valeur propre

La **multiplicité** d'une valeur propre λ de u (respectivement A) est l'ordre de multiplicité de λ en tant que racine de χ_u (resp. χ_A).

Propriété 15 : Nombre de valeurs propres comptées avec multiplicité

Le nombre de valeurs propres comptées avec leur multiplicités est toujours inférieur ou égal à $n = \dim E$.

Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, la somme des multiplicités est égale à $n = \dim E$.

Propriété 16 : Encadrement de la dimension des sous-espaces propres

Si λ valeur propre de u (respectivement A) d'ordre m_λ,

$$1 \leq \dim E_\lambda(u) \leq m_\lambda$$

(resp. $\dim E_\lambda(A)$)

Corollaire 3 : Sous-espace propre associé à une valeur propre simple

Propriété 17 : Trace, déterminant et valeurs propres

Remarque

R 13 – Se retrouve facilement avec les matrices triangulaires.

R 14 – Ce n'est plus vrai si χ_A n'est pas scindé.

5 Cas particulier des matrices réelles

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note $\overline{A}$ la matrice dans laquelle on conjugue tous les cœfficients. On a facilement $\overline{A+B} = \overline{A} + \overline{B}$ et $\overline{AB} = \overline{A}\,\overline{B}$ lorsque ces opérations sont bien définies.

Propriété 18 : Valeur propre complexe d'une matrice réelle

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, λ valeur propre complexe de A de multiplicité m.

- $\overline{\lambda}$
- *Si $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ est un vecteur propre de A associé à λ,*
- *Si $d = \dim E_\lambda(A)$, $(e_1, \dots, e_p)$ une base de $E_\lambda(A)$, alors*

Exercice 6

Si n est impair, montrer qu'il y a toujours au moins une valeur propre réelle.

III DIAGONALISATION

Soit $(E,+,\cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \neq 0$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $u \in \mathcal{L}(E)$.

1 Diagonalisabilité des endomorphismes

Définition 6 : Diagonalisabilité d'un endomorphisme

Exemple

E 10 – Homothéties, projections, symétries, affinités.

Propriété 19 : Caractérisation 1, base de vecteurs propres

Une telle base est dite **diagonalisante**.

Propriété 20 : Caractérisation 2, somme des sous-espaces propres

Exemple

E 11 – Projecteurs, symétries.

Propriété 21 : Caractérisation 3, sous-espaces stables induisant des homothéties

Propriété 22 : Caractérisation 4, somme des dimension des sous-espaces propres

Propriété 23 : Caractérisation 5, multiplicité algébrique et géométrique égales

Propriété 24 : Condition suffisante 1, χ_u simplement scindé

Si χ_u est simplement scindé, u est diagonalisable et les sous-espaces propres sont des droites.

Corollaire 4 : Condition suffisante 2, n valeurs propres distinctes en dimension n

Exercice 7 : CCINP 72

2 Matrices carrées diagonalisables

Définition 7 : Diagonalisabilité d'une matrice carrée

A est <u>diagonalisable</u> sur $\mathbb{K}$ s'il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ et $D \in \mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ tel que $A = PDP^{-1}$

ie A semblable à une matrice diagonale.

Vu la définition de la diagonalisabilité d'un endomorphisme, on en tire immédiatement :

Propriété 25 : Caractérisation 6, matrice d'un endomorphisme diagonalisable

si u est représenté par A, A diagonalisable ssi u l'est.

Remarque

R 15 – Ne pas dire qu'il y a une base dans laquelle A est diagonale !

R 16 – En passant par exemple par l'endomorphisme canoniquement associé, les caractérisations/conditions suffisantes vues pour les endomorphismes s'adaptent aux matrices :

A est diagonalisable
si et seulement s'il existe une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ formée de vecteurs propres de A
si et seulement si la somme (directe) des sous-espaces propres de A est égale à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$
si et seulement si $\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}\, A} \dim E_\lambda(A) = n$
si et seulement si χ_A est scindé et pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}\, A, \quad m_\lambda = \dim E_\lambda(A)$
si χ_A est simplement scindé (n valeurs propres distinctes).

R 17 – Si $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ est l'endomorphisme canoniquement associé à A, et si on a une base diagonalisante $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$, elle est constituée de vecteurs propres associés à des valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Alors la formule de changement de base donne $A = PDP^{-1}$ où $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et pour tout i, $u(e'_i) = \lambda_i e'_i$.
P est la matrice de passage de la base canonique à $\mathcal{B}'$, donc ses colonnes contiennent directement les composantes des n-uplets $e'_1, \dots, e'_n$.
Dans la pratique, on travaille directement matriciellement, les colonnes correspondant (dans la base canonique) aux e'_i sont des vecteurs propres de A.

R 18 – P n'est pas unique alors que D l'est : cette dernière va contenir les valeurs propres de A comptées avec leurs multiplicités.
Comme vu dans la remarque précédente, P est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{K}^n$ vers une base diagonalisante de E pour son endomorphisme canoniquement associé u.

Exercice 8

Que peut-on dire d'une matrice diagonalisable ayant une unique valeur propre ?

Méthode 1 : Diagonaliser une matrice diagonalisable A

1. Déterminer les valeurs propres, par exemple avec χ_A. (Parfois du bon sens (de l'observation) suffit. Essayer de sommer les colonnes, par exemple. Ou alors s'intéresser au noyau, à la trace, au déterminant... en connaissant le lien avec les valeurs propres, lorsque χ_A est scindé.)
2. Chercher une base de chaque sous-espace propre $E_\lambda(A)$.
   Si on a calculé χ_A par une méthode du pivot de Gauss, on peut reprendre la forme échelonnée finale et évaluer en λ pour finir la résolution du système.
   Savoir tirer rapidement des informations de la matrice $A-\lambda I_n$ en observant les colonnes.
   Sinon, dans tous les cas, déterminer le noyau de $A-\lambda I_n$, c'est résoudre un système homogène dont c'est la matrice, cela peut se faire par le pivot de Gauß directement sur cette matrice.
3. Justifier alors que A est diagonalisable.
4. Déterminer une base de vecteurs propres : il suffit de concaténer des bases de chaque sous-espace propre vu qu'ils sont supplémentaires dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
5. Calculer P la matrice de passage de la base canonique à la base de vecteurs propres (lesquels sont directement les colonnes de P).
6. Poser D la matrice diagonale formée des valeurs propres associées à chaque vecteur propre de la base, dans le même ordre.
7. On a alors $A = PDP^{-1}$ (en appliquant une formule de changement de base à l'endomorphisme canoniquement associé à A.)

Exercice 9

Diagonaliser $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 10 : CCINP 67

Exercice 11 : CCINP 59

Exercice 12 : CCINP 69

Exercice 13 : CCINP 70

Exercice 14 : Matrices compagnes

Calculer le polynôme caractéristique de la matrice compagne ($a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{K}$)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Vérifier que ses sous-espaces propres sont des droites puis montrer qu'elle est diagonalisable si et seulement si le polynôme caractéristique est simplement scindé.

3 Applications de la diagonalisation

a Calculs de puissances

Méthode 2

Si on diagonalise $A = PDP^{-1}$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$, valable dans $\mathbb{Z}$ si A est inversible c'est-à-dire si 0 n'est pas valeur propre.

Exercice 15

Trouver le terme général des suites x, y, z telles que pour tout n,

$$\begin{cases} x_{n+1} = y_n + z_n \\ y_{n+1} = x_n + z_n \\ z_{n+1} = x_n + y_n \end{cases}$$

b Commutant d'une matrice (complément)

Définition 8 : Commutant d'une matrice carrée

Le commutant de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est

$\mathscr{C}(A) = \{ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ AM = MA \}$

Propriété 26 : Structure

Il s'agit d'une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

mieux : noyau du morphisme $M \mapsto AM - MA$

Partie non vide stable par comb. lin et par produit.

Méthode 3 : Commutant d'une matrice diagonalisable $A = PDP^{-1}$

1. Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on pose $N = P^{-1}MP$ et on vérifie que M commute avec A si et seulement si N commute avec D.
   C'est facile en passant par les endomorphismes !
2. On détermine directement $\mathscr{C}(D)$ en traduisant $DN = ND$. (Rappel : il est facile de multiplier à gauche ou à droite par une matrice diagonale !)
3. On en déduit $\mathscr{C}(A)$ qui est l'ensemble des PNP^{-1}.

Exercice 16

Déterminer le commutant de $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **puis de** $B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 17 : CCINP 73

c Racines carrées d'une matrice (complément)

Définition 9 : Racines carrées d'une matrice

Une racine carrée de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $M^2 = A$.
On note $\mathscr{R}(A) = \{ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ M^2 = A \}$.

Remarque

$A \times B = B^2 \times B = B^3 = B \times B^2 = B \times A$

R 19 – $\mathscr{R}(A) \subset \mathscr{C}(A)$: si M est une racine de A, alors A est un polynôme en M donc commute avec M.

R 20 – Cette fois, on n'a plus un sous-espace vectoriel en général.

Méthode 4 : Racines carrées d'une matrice diagonalisable

$A = PDP^{-1}$

Même principe que pour le commutant.

1. Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on pose $N = P^{-1}MP$ et on vérifie que M racine carrée de A si et seulement si N racine carrée de D.
2. On détermine directement $\mathscr{R}(D)$ en traduisant $N \in \mathscr{C}(D)$ et $N^2 = D$.
3. On en déduit $\mathscr{R}(A)$ qui est l'ensemble des PNP^{-1}.

À noter que cette méthode s'adapte à d'autres équations que $M^2 = A$.

Exercice 18

Déterminer les racines carrées de $B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$**, puis, pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, celles**

Exercice 18

Déterminer les racines carrées de $B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, puis, pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, celles de $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

d Suites récurrentes

Méthode 5 : Terme général d'une suite vérifiant une relation de récurrence linéaire homogène $u_{n+p} = \sum_{i=0}^{p-1} \alpha_i u_{n+i}$

1. On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ \vdots \\ u_{n+p-1} \end{pmatrix}$.
2. On se ramène à $X_{n+1} = AX_n$, ce qui donne pour tout n, $X_n = A^n X_0$.
3. On peut, en diagonalisant $A = PDP^{-1}$ (si possible), s'affranchir du calcul de P^{-1} puis de celui de A^n en posant $Y_n = P^{-1}X_n$, ce qui donne $X_n = PD^nY_0$.
4. On en déduit l'expression de u_n en fonction de n.

Exercice 19

Déterminer le terme général des suites complexes vérifiant $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = -u_{n+2} - u_{n+1} - u_n$ en posant $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$.

Remarque

R 22 – Quel est le polynôme caractéristique pour l'ordre 2 : $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$?

IV Trigonalisation

Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \neq 0$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $u \in \mathcal{L}(E)$.

1 Définition

Définition 10 : endomorphisme et matrice trigonalisable

- $u \in \mathcal{L}(E)$ est **trigonalisable** s'il existe une base de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ triangulaire.
- $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est **trigonalisable** si elle est semblable à une matrice triangulaire
  ie $\exists P \in GL_n(\mathbb{K}),\ T \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K}),\ M = PTP^{-1}$
  (ou $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$, c'est équivalent)

Propriété 27 : Caractérisation géométrique

Si A est une matrice représentant u alors u trigonalisable ssi A l'est.

Remarque

R 23 – Être diagonalisable implique être trigonalisable. La réciproque est fausse !

R 24 – u est trigonalisable si et seulement s'il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E

telle que pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $\mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_k)$ est stable par u. On parle de **drapeau** stable par u.

R 25 – u est trigonalisable si et seulement s'il existe une base dans laquelle sa matrice est triangulaire supérieure si et seulement s'il existe une base dans laquelle sa matrice est triangulaire inférieure. En effet, une permutation des vecteurs de la base permet de passer de l'un à l'autre.

Propriété 28 : Caractérisation par χ scindé

u (respectivement A) est trigonalisable si et seulement si χ_u (resp χ_A) est scindé.

Corollaire 5 : Trigonalisation automatique dans $\mathbb{C}$

Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, tout endomorphisme, toute matrice est trigonalisable

Remarque

R 26 – Si u (respectivement A) est trigonalisable, comme le polynôme caractéristique est scindé, on a automatiquement que si $\lambda_1,\dots,\lambda_p$ sont les valeurs propres distinctes de de multiplicités respectives $m_1,\dots,m_p$, alors $\sum_{i=1}^{p} m_i\lambda_i = \mathrm{tr}\,u$ (ou $\mathrm{tr}\,A$) et $\prod_{i=1}^{p} \lambda_i^{m_i} = \det u$ (ou $\det A$). Cela saute d'ailleurs au yeux avec la matrice triangulaire !

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (*) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

2 Mise en pratique en dimension 2 ou 3

On peut toujours mettre en application la démonstration par récurrence constructive.

Voici deux exemples particuliers.

Méthode 6 : Trigonalisation en dimension 2

On suppose que $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ est **trigonalisable mais non diagonalisable**, alors A admet une valeur propre double λ et $\dim E_\lambda(A) = 1$.

1. On détermine $\binom{x_1}{y_1}$ vecteur propre associé à λ.
2. On complète en $\left(\binom{x_1}{y_1},\binom{x_2}{y_2}\right)$ base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ (par exemple en piochant dans la base canonique).
3. Alors $A = P\begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}P^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$.

On peut même se ramener à une matrice $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ en cherchant $\binom{x_2}{y_2}$ tel que $A\binom{x_2}{y_2} = \binom{x_1}{y_1} + \lambda\binom{x_2}{y_2}$.

Exercice 20

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 1 \\ -9 & -1 \end{pmatrix}$$

1. **A est-elle trigonalisable ? Diagonalisable ?**
2. **Trigonaliser (resp. diagonaliser) A si elle est trigonalisable (resp. diagonalisable).**

Méthode 7 : Trigonalisation en dimension 3 avec deux valeurs propres

On suppose que $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ est **trigonalisable mais non diagonalisable**, et que A admet une valeur propre simple λ et une valeur propre double μ.

Alors $\dim E_\lambda(A) = \dim E_\mu(A) = 1$.

On montre que A est semblable à $T = \left(\begin{array}{c|cc} \lambda & 0 & 0 \\ \hline 0 & \mu & 1 \\ 0 & 0 & \mu \end{array}\right)$.

1. On détermine $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ vecteur propre associé à λ et $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ vecteur propre associé à μ.
2. On cherche $\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}$ tel que $A\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}$.
3. On vérifie que $\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}\right)$ est un base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
4. Alors $A = P\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 1 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}P^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}$.

Remarque

R 27 – Il se peut aussi que A ait une valeur propre triple.

V Endomorphismes et matrices nilpotentes

1 Définition

Définition 11 : Endomorphisme et matrice nilpotents et indice de nilpotence

$u \in \mathcal{L}(E)$ (resp. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) est dit nilpotent·e lorsqu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^k = 0_{\mathcal{L}(E)}$ (resp. $A^k = 0_n$)

le plus petit $k \in \mathbb{N}^*$ convenant est appelé indice de nilpotence

Remarque

R 28 – u est nilpotent si et seulement si n'importe quelle matrice qui le représente l'est.

Exemple

E 12 – L'endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$ de dérivation.

E 13 – $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.

E 14 – Plus généralement, une matrice triangulaire stricte.

2 Propriétés

Propriété 29 : Caractérisation

u (resp. A) est nilpotent·e

ssi $\chi_u = X^n$ (resp. $\chi_A = X^n$)

ssi $\mathrm{Sp}\,u = \{0\}$ et u trigonalisable (resp. $\mathrm{Sp}\,A = \{0\}$ et A trigonalisable)

Remarque

R 29 – En particulier, un endomorphisme nilpotent n'est presque jamais diagonalisable !

Propriété 30 : Majoration de l'indice de nilpotence

L'indice de nilpotence est toujours $\leqslant n = \dim E$