# 9

# Réduction 1re partie : point de vue géométrique

*Extrait du programme officiel* :

*La réduction des endomorphismes et des matrices carrées prolonge les notions d'algèbre linéaire vues en première année. Elle trouve des applications et des illustrations dans d'autres domaines du programme* (*topologie, équations différentielles, systèmes dynamiques discrets, chaînes de Markov*). *Elle permet également de tisser des liens entre l'algèbre linéaire et l'algèbre générale, notamment polynomiale.*

*Le but de cette section est de donner une introduction substantielle au problème de la réduction. Les approches sont de deux types, qu'il convient d'identifier : la première, de nature géométrique, repose sur les notions de sous-espace stable et d'éléments propres ; la seconde, plus algébrique, fait appel aux polynômes annulateurs* [sera vue plus tard.].

*Sans soulever de difficulté, on signale que les notions d'algèbre linéaire étudiées en première année s'étendent au cas d'un corps de base quelconque. Pour éviter les difficultés liées aux polynômes en caractéristique non nulle, la section est traité sous l'hypothèse que $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$.*

| Contenus | Capacités & commentaires |
|---|---|
| **Éléments propres d'un endomorphisme, d'une matrice carrée** | |
| Sous-espace stable par un endomorphisme. Endomorphisme induit. | En dimension finie, traduction matricielle. |
| Droite stable par un endomorphisme. Valeur propre, vecteur propre (non nul), sous-espace propre. | Équation aux éléments propres $u(x) = \lambda x$. |
| Spectre d'un endomorphisme en dimension finie. | La notion de valeur spectrale est hors programme. |
| La somme d'une famille finie de sous-espaces propres d'un endomorphisme est directe. | Toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre. |
| Le spectre d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie $n$ est fini, et de cardinal au plus $n$. | |
| Si deux endomorphismes $u$ et $v$ commutent, tout sous-espace propre de $u$ est stable par $v$. | Le noyau et l'image de $u$ sont stables par $v$. |
| Valeur propre, vecteur propre, sous-espace propre et spectre d'une matrice carrée. | Équation aux éléments propres $MX = \lambda X$.<br>Deux matrices semblables ont même spectre.<br>Si $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{K}'$ et si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, le spectre de $M$ dans $\mathbb{K}$ est contenu dans le spectre de $M$ dans $\mathbb{K}'$. |
| **Polynôme caractéristique** | |
| Polynôme caractéristique d'une matrice carrée, d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie. | Par convention le polynôme caractéristique est unitaire.<br>Notations $\chi_A$, $\chi_u$. Coefficients du polynôme caractéristique de degrés $0$ et $n-1$. |
| Les valeurs propres d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie sont les racines de son polynôme caractéristique. | Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique. |
| Polynôme caractéristique d'une matrice triangulaire. | |
| Polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit. Multiplicité d'une valeur propre.<br>La dimension du sous-espace propre associé à $\lambda$ est majorée par la multiplicité de $\lambda$. | |
| **Endomorphismes et matrices carrées diagonalisables** | |
| Un endomorphisme d'un espace vectoriel $E$ de dimension finie est dit diagonalisable s'il existe une base de $E$ dans laquelle sa matrice est diagonale. | Une telle base est constituée de vecteurs propres.<br>Cas des projecteurs, des symétries. |
| Pour qu'un endomorphisme soit diagonalisable, il faut et il suffit que la somme de ses sous-espaces propres soit égale à $E$. | Caractérisation par la somme des dimensions des sous-espaces propres. |
| Une matrice carrée est dite diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale. | Interprétation en termes d'endomorphisme.<br>Dans les exercices pratiques, on se limite à $n = 2$ ou $n = 3$. |

| Contenus | Capacités & Commentaires |
|---|---|
| Cas d'un endomorphisme d'un espace de dimension $n$ admettant $n$ valeurs propres distinctes. | Traduction matricielle. |
| Pour qu'un endomorphisme $u$ soit diagonalisable, il faut et il suffit que $\chi_u$ soit scindé et que, pour toute valeur propre de $u$, la dimension de l'espace propre associé soit égale à sa multiplicité. | Traduction matricielle.<br>Cas où $\chi_u$ est scindé à racines simples. |

## Endomorphismes et matrices carrées trigonalisables

| | |
|---|---|
| Un endomorphisme d'un espace vectoriel $E$ de dimension finie est dit trigonalisable s'il existe une base de $E$ dans laquelle sa matrice est triangulaire. | Interprétation géométrique. |
| Une matrice carrée est dite trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire. | Interprétation en termes d'endomorphisme.<br>La pratique de la trigonalisation n'est pas un objectif du programme. |
| Un endomorphisme est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé. | Traduction matricielle.<br>Expression à l'aide des valeurs propres de la trace et du déterminant d'un endomorphisme trigonalisable, d'une matrice trigonalisable. |

## Endomorphismes nilpotents, matrices nilpotentes

| | |
|---|---|
| Endomorphisme nilpotent d'un espace vectoriel $E$ de dimension finie, matrice nilpotente. | |
| Un endomorphisme est nilpotent si et seulement s'il est trigonalisable avec pour seule valeur propre $0$. | Caractérisation des endomorphismes nilpotents et des matrices nilpotentes par le polynôme caractéristique. |
| L'indice de nilpotence est majoré par la dimension de $E$. | |

# Table des matières

**9 Réduction 1re partie : point de vue géométrique** 1

**I Sous-espaces stables** 3
1 Point de vue géométrique . . . 3
2 Point de vue matriciel . . . 4

**II Éléments propres d'un endomorphisme et d'une matrice carrée** 5
1 Cas d'un endomorphisme . . . 5
2 Cas d'une matrice . . . 8
3 Polynôme caractéristique . . . 8
4 Multiplicité des valeurs propres . . . 11
5 Cas particulier des matrices réelles . . . 12

**III Diagonalisation** 12
1 Diagonalisabilité des endomorphismes . . . 12
2 Matrices carrées diagonalisables . . . 14
3 Applications de la diagonalisation . . . 20
a Calculs de puissances . . . 20
b Commutant d'une matrice (complément) . . . 21
c Racines carrées d'une matrice (complément) . . . 22
d Suites récurrentes . . . 23

**IV Trigonalisation** 23
1 Définition . . . 23
2 Mise en pratique en dimension 2 ou 3 . . . 25

**V Endomorphismes et matrices nilpotentes** 25
1 Définition . . . 25
2 Propriétés . . . 26

Dans tout le chapitre, $(E,+,\cdot)$ désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel où $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$, mais se généralise au cas d'un corps quelconque, avec la prudence pour certains résultats de devoir travailler dans un corps de caractéristique nulle ($\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \ n1_{\mathbb{K}} \neq 0_{\mathbb{K}}$.)

# I SOUS-ESPACES STABLES

## 1 Point de vue géométrique

**Définition 1 : Sous-espace stable, endomorphisme induit**

Si $u \in \mathscr{L}(E)$ et $F$ est un sous-espace vectoriel de $E$, $F$ est dit **stable par $u$** lorsque $u(F) \subset F$ c'est-à-dire $\forall\, x \in F,\ \ u(x) \in F$.

Lorsque c'est le cas, $u_F : \left| \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & u(x) \end{array} \right.$, appelé **endomorphisme induit par $u$ sur $F$** est bien défini.

**Exemple**

**E 1 –** $\{0_E\}$ et $E$ sont stables par $u$.

**Remarque**

**R 1 –** $u_F \neq u_{|F} : \left| \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & u(x) \end{array} \right.$.

**Propriété 1 : Caractérisation de la stabilité par une base**

*Si $F$ est de dimension finie $p > 0$, $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de $F$, alors $F$ est stable par $u$ si et seulement si $\forall\, j \in [\![1, p]\!],\quad u(e_j) \in F$.*

**Démonstration**

Conséquence immédiate de la linéarité. ∎

**Propriété 2 : Commutation et stabilité d'image et noyau**

*Si $u, v \in \mathscr{L}(E)$ commutent, l'image et le noyau de l'un sont stables par l'autre.*

**Démonstration**

Vu en TD. ∎

## 2 Point de vue matriciel

Soit $M$ écrite par blocs $M = \begin{array}{cc} \overset{F}{\underset{p}{\leftrightarrow}} & \overset{G}{\underset{q}{\leftrightarrow}} \end{array} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{array}{l} p \updownarrow F \\ q \updownarrow G \end{array} \in \mathscr{M}_{p+q}(\mathbb{K})$.

Si $u \in \mathscr{L}(E)$ est représenté par $M$ dans une base $\mathscr{B}$, alors on peut séparer $\mathscr{B}$ de taille $p+q$ en deux sous-familles :

- les $p$ premiers vecteurs engendrant un sous-espace $F$ de $E$
- les $q$ derniers vecteurs engendrant un sous-espace $G$.

Alors $F$ et $G$ sont supplémentaires de $E$ ($F \oplus G = E$.)

De plus, si $x \in E$, $x_F$ et $x_G$ ses composantes sur $F$ et $G$ (donc $x = x_F + x_G$), $x$ est représenté dans $\mathscr{B}$ par $X = \begin{pmatrix} X_F \\ X_G \end{pmatrix} \begin{array}{l} \updownarrow p \\ \updownarrow q \end{array}$ où $X_F$ et $X_G$ représentent $x_F$ et $x_G$. Alors $u(x)$ est représenté dans $\mathscr{B}$ par

$$MX = \begin{pmatrix} AX_F + BX_G \\ CX_F + DX_G \end{pmatrix} \begin{array}{l} \updownarrow p \\ \updownarrow q \end{array}$$

représentant respectivement les composantes sur $F$ et $G$ de $u(x)$.

**Écrire $X$ sous cette forme est une méthode classique de résolution de problèmes avec des matrices écrites par blocs.**

Cela se généralise à un nombre quelconque de sous-espaces.

**Exercice 1**

**Montrer que tout projection peut être représentée par un matrice de la forme $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et que toute symétrie peut**

être représentée par un matrice de la forme $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & -I_{n-r} \end{pmatrix}$.

**Propriété 3 : Matrice par bloc et stabilité**

*Soit $E = F \oplus G$ et $\mathscr{B}$ une base adaptée à cette somme directe, $u \in \mathscr{L}(E)$, $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$.*

- *$F$ est stable par $u$ si et seulement si $C = 0$.*
- *$G$ est stable par $u$ si et seulement si $B = 0$.*

**Démonstration**

Si $C = 0$, l'image d'une base de $F$ est dans $F$, donc c'est vrai pour tous les vecteurs de $F$ par linéarité.
Si $F$ stable par $u$, alors la composante sur $G$ des image des vecteurs de $\mathscr{B}$ dans $F$ est nulle donc $C = 0$. ■

**Exemple**

**E 2 –** Projections et symétries

**Propriété 4 : Généralisation**

*Soit $E = \bigoplus_{i=1}^{r} E_i$ et $\mathscr{B}$ une base adaptée à cette somme directe, $u \in \mathscr{L}(E)$.*

*$A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ est diagonale par blocs ($A = \begin{pmatrix} A_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & A_r \end{pmatrix}$) si et seulement si chaque $E_i$ est stable par $u$.*

*On peut alors considérer l'endomorphisme $u_i$ induit par $u$ sur $E_i$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B}_i$ (issue de $\mathscr{B}$) est $A_i$.*

**Remarque**

**R 2 –** On retrouve le résultat classique qu'alors $u$ est uniquement déterminé par la donnée des $u_i$.

**Exercice 2**

**Soit $u$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$**

1. **Soit $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + 2z = 0\}$. Montrer que $H$ est stable par $u$.**
2. **Soit $x = (3, 2, 1)$ et $D = \mathrm{Vect}(x)$. Montrer que $D$ est stable par $u$.**
3. **Justifier que $\mathbb{R}^3 = D \oplus H$.**
4. **Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans la quelle la matrice de $u$ est diagonale par blocs, à cœfficients entiers.**

# II Éléments propres d'un endomorphisme et d'une matrice carrée

## 1 Cas d'un endomorphisme

**Remarque**

**R3 –** Si $u \in \mathcal{L}(E)$ et $D$ droite de $E$, on a $a \neq 0_E$ tel que $D = \operatorname{Vect} a$. $D$ stable par $u$ ssi $u(a) \in D$ ssi $\exists \lambda \in \mathbb{K},\ \ u(a) = \lambda a$.

## Définition 2 : Éléments propres d'un endomorphisme

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

- On appelle **valeur propre** de $u$ tout $\lambda \in \mathbb{K}$ tel qu'il existe $x \in E$ **non nul** tel que $u(x) = \lambda x$.
- Un tel vecteur **non nul** est appelé **vecteur propre** associé à la valeur propre $\lambda$.
- On appelle **sous-espace propre** associé à la valeur propre $\lambda$ le sous-espace

$$E_\lambda(u) = \operatorname{Ker}(u - \lambda \operatorname{id}_E) = \{x \in E \mid u(x) = \lambda x\}.$$

- Si $E$ est de dimension finie, l'ensemble des valeurs propres de $u$ est appelé son **spectre**, noté $\operatorname{Sp} u$ ou $\operatorname{Sp}_{\mathbb{K}} u$.

**Remarque**

**R4 –** $\lambda$ est valeur propre de $u$ ssi $\operatorname{Ker}(u - \lambda \operatorname{id}_E) \neq \{0_E\}$ ssi $u - \lambda \operatorname{id}_E$ non injectif.
En particulier, $0$ est valeur propre de $u$ ssi $\operatorname{Ker} u \neq \{0_E\}$ ssi $u$ non injectif.

**R5 –** $E_\lambda(u)$ est constitué des vecteurs propres associés à $\lambda$ **et** du vecteur nul.

**Exemple**

**E3 –** $E = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ et $u : f \mapsto f'$. $\operatorname{Sp} u = \mathbb{R}$, $E_\lambda(u) = \{x \mapsto \alpha e^{\lambda x}, \alpha \in \mathbb{R}\}$.

**E4 –** $E = \mathbb{R}[X]$ et $u : P \mapsto P'$. $\operatorname{Sp} u = \{0\}$, $E_0(u) = \mathbb{R}_0[X]$.

**E5 –** Homothétie $u = \lambda \operatorname{id}_E$. $\operatorname{Sp} u = \{\lambda\}$, $E_\lambda(u) = E$.

**E6 –** Projection $p$ : $\operatorname{Sp} p \subset \{0, 1\}$, $E_1(p) = \operatorname{Im} p$, $E_0(p) = \operatorname{Ker} p$.

## Propriété 5 : Droites stables

*Les droites stables par $u$ sont les droites engendrées par un vecteur propre de $u$.*

## Propriété 6 : Stabilité de sous-espaces propres

*Si $u, v \in \mathcal{L}(E)$ commutent, les sous-espaces propres de l'un sont stables par l'autre.*

**Démonstration**

Si $\lambda$ valeur propre de $u$ et $x \in E_\lambda(u)$, alors $u(x) = \lambda x$ et $u(v(x)) = v(u(x)) = v(\lambda x) = \lambda v(x)$ donc $v(x) \in E_\lambda(u)$. ∎

## Propriété 7 : Des sous-espaces propres sont en somme directe

*Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ des valeurs propres de $u$ deux à deux distinctes.*

*Alors les sous-espaces propres $E_\lambda(u)$ sont en somme directe ie $\sum_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}(u) = \bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}(u)$.*

**Démonstration**

On raisonne par récurrence sur le nombre $p$ de sous-espace propres.
Il n'y a rien à faire pour un seul.
Soit $p \geqslant 1$ tel que ce soit vrai pour pour $p-1$ sous-espaces propres, et soit $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ des valeurs propres deux à deux distinctes.
Si $x_1 + \dots + x_p = 0_E$ $(1)$ où pour tout $i$, $x_i \in E_{\lambda_i}(u)$, alors en composant par $u$ on obtient $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_p x_p = 0_E$ $(2)$.
Alors $(2) - \lambda_p(1)$ donne $\underbrace{(\lambda_1 - \lambda_p)x_1}_{\in E_{\lambda_1}(u)} + \dots + \underbrace{(\lambda_{p-1} - \lambda_p)x_{p-1}}_{\in E_{\lambda_{p-1}}(u)} = 0_E$ donc par hypothèse de récurrence, pour tout $i \in [\![0, p-1]\!]$, $(\lambda_i - \lambda_p)x_i = 0_E$.
Et comme les valeurs propres choisies sont deux à deux distinctes, pour tout $i \in [\![0, p-1]\!]$, $x_i = 0_E$.
Et enfin, avec $(1)$, $x_p = 0_E$ ce qui établit la récurrence. ■

**Corollaire 1 : Des vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes sont libres**

*Des vecteurs propres de $u$ associés à des valeurs propres deux à deux distinctes sont linéairement indépendants (forment une famille libre).*

**Démonstration**

Avec les mêmes notations, si on a $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{K}$ et pour tout $i$, $x_i \in E_{\lambda_i}(u)$, et si $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_p x_p = 0_E$ alors vu la somme directe, pour tout $i$, $\alpha_i x_i = 0_E$. Mais comme ce sont des vecteurs propres, $x_i \neq 0_E$ et donc $\alpha_i = 0$. ■

**Exercice 3**

**Montrer que les familles $\left(x \mapsto e^{\lambda x}\right)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ et $(x \mapsto \cos(\lambda x))_{\lambda \in \mathbb{R}^+}$ sont des familles libres.**

**Corollaire 2 : Majoration du nombre de valeurs propres**

*Si $E$ est de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E)$, alors $\left|\operatorname{Sp} u\right| \leqslant \dim E$.*

**Démonstration**

Une famille libre de vecteurs de $E$ possède toujours au plus $\dim E$ vecteurs. ■

**Exercice 4 : CCINP 83**

**Soit $u$ et $v$ deux endomorphismes d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E$.**

1. **Soit $\lambda$ un réel non nul. Prouver que si $\lambda$ est valeur propre de $u \circ v$, alors $\lambda$ est valeur propre de $v \circ u$.**
2. **On considère, sur $E = \mathbb{R}[X]$ les endomorphismes $u$ et $v$ définis par $u : P \longmapsto \int_1^X P$ et $v : P \longmapsto P'$.**
   **Déterminer $\operatorname{Ker}(u \circ v)$ et $\operatorname{Ker}(v \circ u)$. Le résultat de la question 1. reste-t-il vrai pour $\lambda = 0$ ?**
3. **Si $E$ est de dimension finie, démontrer que le résultat de la première question reste vrai pour $\lambda = 0$.**
   **Indication : penser à utiliser le déterminant.**

**Solution** :

1. Soit $\lambda \neq 0$.
   Si $\lambda$ valeur propre de $u \circ v$ alors $\exists x \in E \setminus \{0\} / (u \circ v)(x) = \lambda x$. $(*)$

   Pour un tel $x$ non nul, on a alors $v(u \circ v(x)) = \lambda v(x)$ c'est-à-dire $(v \circ u)(v(x)) = \lambda v(x)$ $(**)$.
   Si $v(x) = 0$ alors, d'après $(*)$, $\lambda x = 0$. Ce qui est impossible car $x \neq 0$ et $\lambda \neq 0$.
   Donc $v(x) \neq 0$.
   Donc, d'après $(**)$, $v(x)$ est un vecteur propre de $v \circ u$ associé à la valeur propre $\lambda$.
2. On trouve que $v \circ u = \operatorname{Id}$ et $u \circ v : P \longmapsto P(X) - P(1)$.
   Ainsi $\operatorname{Ker}(v \circ u) = \{0\}$ et $\operatorname{Ker}(u \circ v) = \mathbb{R}_0[X]$.
   On observe que 0 est valeur propre de $u \circ v$ mais n'est pas valeur propre de $v \circ u$.
   On constate donc que le résultat de la question 1. est faux pour $\lambda = 0$.

3. Si $E$ est de dimension finie, comme $\det(u\circ v)=\det u\det v=\det(v\circ u)$ alors :
0 est valeur propre de $u\circ v \iff \det(u\circ v)=0 \iff \det(v\circ u)=0 \iff$ 0 est valeur propre de $v\circ u$.
**Remarque 1** : le résultat de la question 1. est vrai pour $\lambda=0$ si et seulement si $E$ est de dimension finie.

**Remarque 2** : Si $E$ est de dimension finie, $u\circ v$ et $v\circ u$ ont les mêmes valeurs propres.

## 2 Cas d'une matrice

Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

**Définition 3 : Éléments propres d'une matrice**

Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- On appelle **valeur propre** de $A$ tout $\lambda\in\mathbb{K}$ tel qu'il existe $X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ **non nul** tel que $AX=\lambda X$.
- Un tel vecteur **non nul** est appelé **vecteur propre** associé à la valeur propre $\lambda$.
- On appelle **sous-espace propre** associé à la valeur propre $\lambda$ le sous-espace

$$E_\lambda(A)=\operatorname{Ker}(A-\lambda I_n)=\left\{X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})\mid AX=\lambda X\right\}.$$

- L'ensemble des valeurs propres de $A$ est appelé son **spectre**, noté $\operatorname{Sp}A$ ou $\operatorname{Sp}_{\mathbb{K}}A$.

**Remarque**

**R6 –** Les éléments propres d'une matrice sont ceux de l'application linéaire canoniquement associée (via la base canonique de $\mathbb{K}^n$).

**R7 –** Si $\mathbb{K}$ sous-corps de $\mathbb{C}$, $\operatorname{Sp}_{\mathbb{K}}A\subset\operatorname{Sp}_{\mathbb{C}}A$ car des vecteurs propres dans $\mathbb{K}$ sont en particulier des vecteurs propres dans $\mathbb{C}$.

**Exemple**

**E7 –** $A=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$ est telle que $A^2=-I_2$. Les valeurs propres vérifient $\lambda^2=-1$.
Donc $\operatorname{Sp}_{\mathbb{R}}A=\varnothing$.
Mais Avec le même argument, on a $\operatorname{Sp}_{\mathbb{C}}A\subset\{-\mathrm{i},\mathrm{i}\}$.
Or $A\binom{x}{y}=\mathrm{i}\binom{x}{y}\iff x=\mathrm{i}y$ : $\binom{\mathrm{i}}{1}$ vecteur propre associé à la valeur propre $\mathrm{i}$, et $A\binom{x}{y}=-\mathrm{i}\binom{x}{y}\iff x=-\mathrm{i}y$ : $\binom{-\mathrm{i}}{1}$ vecteur propre associé à la valeur propre $-\mathrm{i}$ et donc $\operatorname{Sp}_{\mathbb{C}}A=\{-\mathrm{i},\mathrm{i}\}$.

**Propriété 8 : Le spectre d'une matrice est le spectre des endomorphismes qu'elle représente**

*Si $(E,+,\cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n\geqslant 1$, $\mathcal{B}$ est une base de $E$, et $u\in\mathcal{L}(E)$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est $A$, alors $\operatorname{Sp}u=\operatorname{Sp}A$.*

Et plus précisément les vecteurs propres et sous-espaces de $A$ sont les représentations dans la base $\mathcal{B}$ de ceux de $u$.

## 3 Polynôme caractéristique

Soit $(E,+,\cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n\neq 0$. Si $u\in\mathcal{L}(E)$,

$$\begin{aligned}\lambda\in\operatorname{Sp}u &\iff \exists x\neq 0_E,\quad u(x)=\lambda x\\ &\iff \exists x\neq 0_E,\quad (u-\lambda\,\mathrm{id}_E)(x)=0_E\\ &\iff \operatorname{Ker}(u-\lambda\,\mathrm{id}_E)\neq\{0_E\}\\ &\iff u-\lambda\,\mathrm{id}_E \text{ non injective}\\ &\iff u-\lambda\,\mathrm{id}_E \text{ non bijective}\end{aligned}$$

**Propriété 9 : Valeur propre et déterminant**

*Si $u \in \mathscr{L}(E)$, $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de $u$ si et seulement si $u - \lambda \operatorname{id}_E \notin \mathscr{GL}(E)$ si et seulement si $\det(u - \lambda \operatorname{id}_E) = 0$.*

**Remarque**

**R 8 –** En dimension infinie, $u - \lambda \operatorname{id}_E \notin \mathscr{GL}(E) \not\Longrightarrow \lambda$ valeur propre de $u$, car $u - \lambda \operatorname{id}_E$ pourrait être injectif sans être bijectif.

**R 9 –** En particulier, $u \in \mathscr{GL}(E)$ si et seulement si $0 \notin \operatorname{Sp} u$.

De la même manière,

**Propriété 10 : Version matricielle**

*Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de $A$ si et seulement si $A - \lambda I_n \notin \mathscr{GL}_n(\mathbb{K})$ si et seulement si $\det(A - \lambda I_n) = 0$.*

**Remarque**

**R 10 –** En particulier, $A \in \mathscr{GL}_n(\mathbb{K})$ si et seulement si $0 \notin \operatorname{Sp} A$.

Comme, pour $x \in \mathbb{K}$, $\det(xI_n - A) = (-1)^n \det(A - xI_n)$ est polynomial en $x$, on peut définir :

**Définition 4 : Polynôme caractéristique**

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $u \in \mathscr{L}(E)$ où $E$ est de dimension finie.

- On appelle **polynôme caractéristique** de $A$ le polynôme $\chi_A \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \chi_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A)$.
- On appelle **polynôme caractéristique** de $u$ le polynôme $\chi_u \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \chi_u(\lambda) = \det(\lambda \operatorname{id}_E - u)$.

**Exemple**

**E 8 –** Avec $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\chi_A = X^2 + 1$.

**Remarque**

**R 11 –** Quitte à travailler dans le corps $\mathbb{K}(X)$ (des fractions rationnelles), on peut rigoureusement écrire $\chi_A = \det(XI_n - A)$.

**Propriété 11 : Valeurs propres d'une matrice triangulaire**

*Les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont ses cœfficients diagonaux.*

**Exercice 5**

**Montrer que $A$ et $A^\top$ ont même polynôme caractéristique.**

**Propriété 12 : du polynômes caractéristique**

*Soit $u \in \mathscr{L}(E)$, $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.*

- *Les racines de $\chi_A$ (respectivement $\chi_u$) sont exactement les valeurs propres de $A$ (respectivement $u$).*
- *Si $\mathscr{B}$ base de $E$ tel que $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$, alors $\chi_u = \chi_A$.*
- *$\chi_A$ est de degré $n$ unitaire. Plus précisément,*

$$\chi_A = X^n - (\operatorname{tr} A)X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det A.$$

*$\chi_u$ est de degré $n$ unitaire. Plus précisément,*

$$\chi_u = X^n - (\operatorname{tr} u)X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det u.$$

**Remarque**

**R 12 –** Les cœfficients se retrouvent facilement en considérant le cas d'une matrice triangulaire et en utilisant les relations cœfficients-racines.

**R 13 –** En dimension 2, on a immédiatement $\chi A = X^2 - (\operatorname{tr} A)X + \det A$.

**Démonstration**

- Déjà vu.
- Si $\mathscr{B}$, $x \in \mathbb{K}$, $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x\,\mathrm{id}_E - u) = xI_n - A$.
- $$\chi_A = \begin{vmatrix} X - a_{1,1} & & (-a_{i,j}) \\ & \ddots & \\ (-a_{i,j}) & & X - a_{n,n} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) m_{\sigma(1),1} \cdots m_{\sigma(n),n},$$

  où les $m_{i,j}$ sont des polynômes de degré $0$ (s'il vaut $-a_{i,j}$) ou $1$ (s'il vaut $X - a_{i,i}$).
  On a donc $\chi_A \in \mathbb{K}_n[X]$. On remarque que si $\sigma \neq \mathrm{id}$, on a au moins deux termes constants dans le produit (car $\sigma$ injective), donc

  $$\chi_A = (X - a_{1,1}) \cdots (X - a_{n,n}) + Q$$

  où $\deg Q \leqslant n-2$. Soit encore

  $$\chi_A = X^n - \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} X^{n-1} + Q_1 = X^n - (\operatorname{tr} A)X^{n-1} + Q_1$$

  où $\deg Q_1 \leqslant n-2$.

  Donc $\chi_A$ est de degré $n$, unitaire et de cœficient en $X^{n-1}$ égal à $-\operatorname{tr} A$.

  Le cœfficient constant est $\chi_A(0) = \det(-A) = (-1)^n \det A$.
- Il suffit de considérer une matrice dans une base de $E$ et utiliser le point précédent. ■

**Propriété 13 : Invariants de similitude**

*Le polynôme caractéristique et le spectre sont des invariants de similitude.*

**Démonstration**

Des matrices semblables représentent un même endomorphisme. ■

**Propriété 14 : Polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit**

*Soit $F$ un sous-espace vectoriel non nul de $E$ stable par $u$, $u_F$ endomorphisme induit par $u$ sur $F$. Alors $\chi_{u_F}$ divise $\chi_u$.*

**Démonstration**

Soit $\mathscr{B}_F$ base de $F$ complétée en $\mathscr{B}$ base de $E$. Alors la matrice de $u$ dans $\mathscr{B}$ est de la forme $M = \begin{pmatrix} A & B \\ (0) & C \end{pmatrix}$ où $A$ est la matrice dans $\mathscr{B}_F$ de $u$.

Alors $\chi_u = \chi_M = \begin{vmatrix} XI_p - A & -B \\ (0) & XI_{n-p} - C \end{vmatrix} = \chi_A \times \chi_C$ est divisible par $\chi_A = \chi_{u_F}$. ■

**Théorème 1 : de Cayley-Hamilton**

*Le polynôme caractéristique est un polynôme annulateur.*

**Exemple**

**E 9 –** Si $n = 2$, $A^2 = (\operatorname{tr} A)A - (\det A)I_n$.

**Démonstration**

(Non exigible) Vue plus tard.

## 4 Multiplicité des valeurs propres

Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \neq 0$, $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $u \in \mathscr{L}(E)$.

**Définition 5 : Multiplicité d'une valeur propre**

La **multiplicité** d'une valeur propre $\lambda$ de $u$ (respectivement $A$) est sa multiplicité en tant que racine du polynôme caractéristique.

**Propriété 15 : Nombre de valeurs propres comptées avec multiplicité**

*Le nombre de valeurs propres comptées avec leur multiplicités est toujours au plus égal à $n$ (dimension de $E$ ou taille de la matrice).*
*Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, il y a toujours égalité.*

**Propriété 16 : Encadrement de la dimension des sous-espaces propres**

*Si $\lambda$ valeur propre de $u$ (respectivement $A$) d'ordre $m_\lambda$,*

$$1 \leqslant \dim E_\lambda(u) \leqslant m_\lambda \quad \left(\text{respectivement } 1 \leqslant \dim E_\lambda(A) \leqslant m_\lambda\right).$$

**Démonstration**

Soit $d_\lambda = \dim E_\lambda(u)$.
On a déjà comme $\lambda$ valeur propre que $E_\lambda(u)$ n'est pas réduit au vecteur nul et donc $d_\lambda \geqslant 1$.
De plus, comme $E_\lambda(u)$ est stable par $u$, si on note $u_\lambda$ l'endomorphisme induit par $u$ sur $E_\lambda(u)$, $\chi_{u_\lambda}$ divise $\chi_u$.

Or $u_\lambda : \left| \begin{array}{ccc} E_\lambda(u) & \longrightarrow & E_\lambda(u) \\ x & \longmapsto & u(x) = \lambda x \end{array} \right.$ donc $u_\lambda \lambda \mathrm{id}_E$ donc $\chi_{u_\lambda} = (X - \lambda)^{d_\lambda}$.

Cela prouve finalement que $d_\lambda \leqslant m_\lambda$.
Pour la matrice, il suffit de passer par n'importe quel endomorphisme qu'elle représente. ■

**Corollaire 3 : Sous-espace propre associé à une valeur propre simple**

*Le sous-espace propre associé à une valeur propre simple est de dimension 1.*

**Propriété 17 : Trace, déterminant et valeurs propres**

*Si $\chi_A$ est scindé, $\lambda_1,\dots,\lambda_p$ les valeurs propres distinctes de $A$ de multiplicités respectives $m_1,\dots,m_p$, alors $\chi_A = \prod_{i=1}^{p}(X-\lambda_i)^{m_i}$, $\sum_{i=1}^{p} m_i\lambda_i = \operatorname{tr} A$ et $\prod_{i=1}^{p}\lambda_i^{m_i} = \det A$.*

*On a un énoncé analogue pour $u$.*

**Démonstration**

Ce sont les relations cœfficients racines, avec $\chi_A = X^n - (\operatorname{tr} A)X^{n-1} + \dots + (-1)^n \det A$. ■

**Remarque**

**R 14** – Se retrouve facilement avec les matrices triangulaires.

**R 15** – Ce n'est plus vrai si $\chi_A$ n'est pas scindé.

## 5 Cas particulier des matrices réelles

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note $\overline{A}$ la matrice dans laquelle on conjugue tous les cœfficients. On a facilement $\overline{A+B} = \overline{A}+\overline{B}$ et $\overline{AB} = \overline{A}\,\overline{B}$ lorsque ces opérations sont bien définies.

**Propriété 18 : Valeur propre complexe d'une matrice réelle**

*Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\lambda$ valeur propre complexe de $A$ de multiplicité $m$.*

- *$\overline{\lambda}$ est valeur propre de $A$ de multiplicité $m$.*
- *Si $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ est un vecteur propre de $A$ associé à $\lambda$, $\overline{X}$ est vecteur propre de $A$ associé à $\overline{\lambda}$.*
- *Si $d = \dim E_\lambda(A)$, $(e_1,\dots,e_p)$ une base de $E_\lambda(A)$, alors $\left(\overline{e}_1,\dots,\overline{e}_p\right)$ base de $E_{\overline{\lambda}}(A)$ de dimension $d$.*

**Démonstration**

On sait (en utilisant la caractérisation de la multiplicité par les dérivées) si $\lambda \in \mathbb{C}$ est racine de $P \in \mathbb{R}[X]$ alors $\overline{\lambda}$ est racine de $P$ du même ordre.

En appliquant cela au polynôme caractéristique de $A$ et en remarquant que $AX = \lambda X$ implique $A\overline{X} = \overline{\lambda}\overline{X}$, on peut conclure.

On a aussi facilement que la conjugaison ne change pas l'indépendance linéaire d'une famille de vecteurs. ■

**Exercice 6**

**Si $n$ est impair, montrer qu'il y a toujours au moins une valeur propre réelle.**

# III Diagonalisation

Soit $(E,+,\cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \neq 0$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $u \in \mathcal{L}(E)$.

## 1 Diagonalisabilité des endomorphismes

**Définition 6 : Diagonalisabilité d'un endomorphisme**

$u$ est **diagonalisable** s'il existe une base de $E$ dans laquelle la matrice de $u$ est diagonale.
Une telle base est dite **diagonalisante**.

**Exemple**

**E 10** – Homothéties, projections, symétries, affinités.

**Propriété 19 : Caractérisation 1, base de vecteurs propres**

*$u$ est diagonalisable si et seulement s'il existe une base de $E$ formée de vecteurs propres.*

**Propriété 20 : Caractérisation 2, somme des sous-espaces propres**

*$u$ est diagonalisable si et seulement si la somme (directe) des sous-espaces propres de $u$ est égale à $E$ ($E = \bigoplus_{\lambda \in \operatorname{Sp} u} E_\lambda(u)$.)*

**Démonstration**

Dans un sens on prend une base adaptée à la décomposition, dans l'autre on décompose tout $x \in E$ dans une base de vecteurs propres. ■

**Exemple**

**E 11** – Projecteurs, symétries.

**Propriété 21 : Caractérisation 3, sous-espaces stables induisant des homothéties**

*$u$ est diagonalisable si et seulement si $E$ est somme directe de sous-espaces stables sur lesquelles $u$ induit une homothétie.*

**Propriété 22 : Caractérisation 4, somme des dimension des sous-espaces propres**

*$u$ est diagonalisable si et seulement si $\sum_{\lambda \in \operatorname{Sp} u} \dim E_\lambda(u) = \dim E$.*

**Propriété 23 : Caractérisation 5, multiplicité algébrique et géométrique égales**

*$u$ est diagonalisable si et seulement si $\chi_u$ est scindé et pour tout $\lambda \in \operatorname{Sp} u$, $m_\lambda = \dim E_\lambda(u)$.*

**Démonstration**

$\Longrightarrow$ Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base diagonalisante adaptée à $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}(u)$ où $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ les valeurs propres distinctes associées, $d_1, \ldots, d_p$ les dimensions des sous-espaces propres associés $E_{\lambda_i}(u)$.

Alors, la matrice dans $\mathscr{B}$ étant diagonale, chaque $\lambda_i$ apparaissant $d_i$ fois sur la diagonale, $\chi_u = \prod_{i=1}^{p} (X - \lambda_i)^{d_i}$ et donc $m_{\lambda_i} = d_i = \dim E_{\lambda_i}(u)$.

$\Longleftarrow$ Si $\chi_u$ est scindé et pour tout $\lambda \in \operatorname{Sp} u$, $m_\lambda = \dim E_\lambda(u)$, alors $\sum_{\lambda \in \operatorname{Sp} u} \dim E_\lambda(u) = \dim E$ donc $u$ est diagonalisable. ■

**Propriété 24 : Condition suffisante 1, $\chi_u$ simplement scindé**

*Si $\chi_u$ est simplement scindé, alors $u$ est diagonalisable et tous les sous-espaces propres sont des droites vectorielles (ie de dimension $1$).*

**Démonstration**

Il y a $\dim E$ valeurs propres et comme chaque sous-espace est dimension au moins $1$ et que la somme de leurs dimensions est majorée par celle de $E$, elles sont toutes égales à $1$, la somme des dimensions vaut $\dim E$ et $u$ est diagonalisable. ■

**Corollaire 4 : Condition suffisante 2, $n$ valeurs propres distinctes en dimension $n$**

*Si $u$ possède $n$ valeurs propres distinctes en dimension $n$, alors u est diagonalisable.*

**Exercice 7 : CCINP 72**

Soit $n$ un entier naturel non nul.
Soit $f$ un endomorphisme d'un espace vectoriel $E$ de dimension $n$, et soit $e = (e_1, \dots, e_n)$ une base de $E$.
On suppose que $f(e_1) = f(e_2) = \cdots = f(e_n) = v$, où $v$ est un vecteur donné de $E$.

1. Donner le rang de $f$.
2. $f$ est-il diagonalisable ? (discuter en fonction du vecteur $v$)

## 2 Matrices carrées diagonalisables

**Définition 7 : Diagonalisabilité d'une matrice carrée**

$A$ est **diagonalisable** sur $\mathbb{K}$ si et seulement si elle est semblable sur $\mathbb{K}$ à une matrice diagonale, c'est-à-dire s'il existe $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ et $D \in \mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ telles que $A = PDP^{-1}$ ie $D = P^{-1}AP$.

Vu la définition de la diagonalisabilité d'un endomorphisme, on en tire immédiatement :

**Propriété 25 : Caractérisation 6, matrice d'un endomorphisme diagonalisable**

*Si $u$ est n'importe quel endomorphisme représenté par $A$, alors $A$ est diagonalisable si et seulement si $u$ l'est.*

**Démonstration**

Supposons que $u$ soit représenté par $A$ dans une base $\mathcal{B}$ de $E$.
On sait que $A$ est diagonalisable si et seulement s'il existe $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ et $D \in \mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ telles que $A = PDP^{-1}$ ie $D = P^{-1}AP$ et que $u$ est diagonalisable si et seulement s'il existe une base de $E$ dans laquelle la matrice de $u$ est diagonale.
On a donc bien $A$ est diagonalisable si et seulement si $u$ l'est.
De plus, $P$ est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ dans laquelle $A$ représente $u$ à une base diagonalisante. ■

**Remarque**

**R 16 –** Ne pas dire qu'il y a une base dans laquelle $A$ est diagonale !

**R 17 –** En passant par exemple par l'endomorphisme canoniquement associé, les caractérisations/conditions suffisantes vues pour les endomorphismes s'adaptent aux matrices :

$A$ est diagonalisable si et seulement s'il existe une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ formée de vecteurs propres
si et seulement si la somme (directe) des sous-espaces propres de $A$ est égale à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$
si et seulement si $\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}\, A} \dim E_\lambda(A) = n$
si et seulement si $\chi_A$ est scindé et pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}\, A, m_\lambda = \dim E_\lambda(A)$
**si** $\chi_A$ est simplement scindé ($n$ valeurs propres distinctes).

**R 18 –** Si $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ est l'endomorphisme canoniquement associé à $A$, et si on a une base diagonalisante $\mathcal{B}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$, elle est constituée de vecteurs propres associés à des valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Alors la formule de changement de base donne $A = PDP^{-1}$ où $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ et pour tout $i$, $u(e'_i) = \lambda_i e'_i$.
$P$ est la matrice de passage de la base canonique à $\mathcal{B}'$, donc ses colonnes contiennent directement les composantes des $n$-uplets $e'_1, \ldots, e'_n$.
Dans la pratique, on travaille directement matriciellement, les colonnes correspondant (dans la base canonique) aux $e'_i$ sont des vecteurs propres de $A$.

**R 19 –** $P$ n'est pas unique alors que $D$ l'est : cette dernière va contenir les valeurs propres de $A$ comptées avec leurs multiplicités.
Comme vu dans la remarque précédente, $P$ est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{K}^n$ vers une base diagonalisante de $E$ pour son endomorphisme canoniquement associé $u$.

**Exercice 8**

**Que peut-on dire d'une matrice diagonalisable ayant une unique valeur propre ?**

### Méthode 1 : Diagonaliser une matrice diagonalisable $A$

1. Déterminer les valeurs propres, par exemple avec $\chi_A$. (Parfois du bon sens (de l'observation) suffit. Essayer de sommer les colonnes, par exemple. Ou alors s'intéresser au noyau, à la trace, au déterminant... en connaissant le lien avec les valeurs propres, lorsque $\chi_A$ est scindé.)
2. Chercher une base de chaque sous-espace propre $E_\lambda(A)$.
   Si on a calculé $\chi_A$ par une méthode du pivot de Gauss, on peut reprendre la forme échelonnée finale et évaluer en $\lambda$ pour finir la résolution du système.
   Savoir tirer rapidement des informations de la matrice $A - \lambda I_n$ en observant les colonnes.
   Sinon, dans tous les cas, déterminer le noyau de $A - \lambda I_n$, c'est résoudre un système homogène dont c'est la matrice, cela peut se faire par le pivot de Gauß directement sur cette matrice.
3. Justifier alors que $A$ est diagonalisable.
4. Déterminer une base de vecteurs propres : il suffit de concaténer des bases de chaque sous-espace propre vu qu'ils sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
5. Calculer $P$ la matrice de passage de la base canonique à la base de vecteurs propres (lesquels sont directement les colonnes de $P$).
6. Poser $D$ la matrice diagonale formée des valeurs propres associées à chaque vecteur propre de la base, dans le même ordre.
7. On a alors $A = PDP^{-1}$ (en appliquant une formule de changement de base à l'endomorphisme canoniquement associé à $A$.)

**Exercice 9**

**Diagonaliser** $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

**Solution** :

$$\chi_A = \begin{vmatrix} X-5 & -1 & 1 \\ -2 & X-4 & 2 \\ -1 & 1 & X-3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 & X-3 \\ -2 & X-4 & 2 \\ X-5 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 & X-3 \\ 0 & X-6 & -2(X-4) \\ 0 & X-6 & (X-4)^2 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} -1 & 1 & X-3 \\ 0 & X-6 & -2(X-4) \\ 0 & 0 & (X-2)(X-4) \end{vmatrix} = (X-2)(X-4)(X-6)$$

Avec $L_1 \leftrightarrow L_3$, puis $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$, puis $L_3 \leftarrow L_3 + (X-5)L_1$ puis $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$.

Donc $\mathrm{Sp}(A) = \{2,4,6\}$ : 3 valeurs propres distinctes en dimension 3 donc $A$ est diagonalisable et les sous-espaces propres sont des droites vectorielles.

Puis, en appliquant un pivot de gauß similaire à celui du calcul du polynôme caractéristique (il suffit d'évaluer le dernier déterminant en la valeur propre),

- $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_2(A) \iff \begin{cases} -x+y-z = 0 \\ -4y+4z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = z \end{cases}$ donc $E_2(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

  Autre méthode : $A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ : $C_2 + C_3 = 0$ donc $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in E_2(A)$ qui est une droite donc $E_2(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

  Si on ne sait pas déjà que c'est une droite, on vérifie $(C_1, C_2)$ libre donc le rang vaut 2 et le noyau est de dimension 1 par théorème du rang.

- $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_4(A) \iff \begin{cases} -x+y+z = 0 \\ -2y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = z \\ y = 0 \end{cases}$ donc $E_4(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_6(A) \iff \begin{cases} -x+y+3z = 0 \\ z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases}$ donc $E_6(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ est donc une base de vecteurs propres et la formule de changement de base (appliqué à l'endomorphisme canoniquement associé à $A$ entre la base canonique et $\mathscr{B}' = ((0,1,1),(1,0,1),(1,1,0))$ donne $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

**Exercice 10 : CCINP 67**

**Soit la matrice** $M = \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ b & 0 & c \\ b & -a & 0 \end{pmatrix}$ **où** $a, b, c$ **sont des réels.**

$M$ **est-elle diagonalisable dans** $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ **?** $M$ **est-elle diagonalisable dans** $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ **?**

---

**Corrigé** :

$\chi_M(X) = \det(XI_3 - M)$.

Après calculs, on trouve, $\chi_M(X) = X(X^2 + ca - ba - bc)$.

**Premier cas** : $ca - ba - bc < 0$

$M$ est diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ car $M$ possède trois valeurs propres réelles distinctes.
Elle est, a fortiori, diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$.

**Deuxième cas** : $ca - ba - bc = 0$

Alors, 0 est la seule valeur propre de $M$.
Ainsi, si $M$ est diagonalisable, alors $M$ est semblable à la matrice nulle c'est-à-dire $M = 0$ ou encore $a = b = c = 0$.
Réciproquement, si $a = b = c = 0$ alors $M = 0$ et donc $M$ est diagonalisable.
On en déduit que $M$ est diagonalisable si et seulement si $a = b = c = 0$.

**Troisième cas** : $ca - ba - bc > 0$

Alors 0 est la seule valeur propre réelle et donc $M$ n'est pas diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ car $\chi_M(X)$ n'est pas scindé sur $\mathbb{R}[X]$.
En revanche, $M$ est diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ car elle admet trois valeurs propres complexes distinctes.

**Exercice 11 : CCINP 59**

**Soit $n$ un entier naturel tel que $n \geqslant 2$.**
**Soit $E$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{K}=\mathbb{C}$) de degré inférieur ou égal à $n$.**
**On pose : $\forall P \in E$, $f(P) = P - P'$.**

1. **Démontrer que $f$ est bijectif de deux manières :**
   (a) **sans utiliser de matrice de $f$,**
   (b) **en utilisant une matrice de $f$.**
2. **Soit $Q \in E$. Trouver $P$ tel que $f(P) = Q$ .**
   **Indication : si $P \in E$, quel est le polynôme $P^{(n+1)}$ ?**
3. **$f$ est-il diagonalisable ?**

---

**Corrigé** :

1. $f$ est clairement linéaire. (*) De plus, $\forall P \in E \setminus \{0\}$, $\deg P' < \deg P$ donc $\deg(P-P') = \deg P$.
   Et, si $P=0$, alors $P-P'=0$ donc $\deg(P-P') = \deg P = -\infty$.
   On en déduit que $\forall P \in E$, $\deg f(P) = \deg P$.
   Donc $f(E) \subset E$. (**)
   D'après (*) et (**), $f$ est bien un endomorphisme de $E$.

   (a) Déterminons $\operatorname{Ker} f$.
   Soit $P \in \operatorname{Ker} f$.
   $f(P) = 0$ donc $P - P' = 0$ donc $\deg(P-P') = -\infty$.
   Or, d'après ce qui précéde, $\deg(P-P') = \deg P$ donc $\deg P = -\infty$.
   Donc $P = 0$.
   On en déduit que $\operatorname{Ker} f = \{0\}$.

   Donc $f$ est injectif.
   Or, $f \in \mathscr{L}(E)$ et $E$ est de dimension finie ($\dim E = n+1$) donc $f$ est bijectif.

   (b) Soit $e = (1, X, \ldots, X^n)$ la base canonique de $E$. Soit $A$ la matrice de $f$ dans la base $e$.
   $$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & & (0) \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & -n \\ (0) & & & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{R}).$$
   $\det A = 1$ d'où $\det A \neq 0$.
   Donc $f$ est bijectif.

2. Soit $Q \in E$.
   D'après 1. : $\exists! P \in E$, tel que $f(P) = Q$.
   $P - P' = Q$, $P' - P'' = Q'$,..., $P^{(n)} - P^{(n+1)} = Q^{(n)}$.
   Or $P^{(n+1)} = 0$, donc, en sommant ces $n+1$ égalités, $P = Q + Q' + \cdots + Q^{(n)}$.

3. Reprenons les notations de 1.(b).
   Tout revient à se demander si $A$ est diagonalisable.
   Notons $P_A(X)$ le polynôme caractéristique de $A$.
   D'après 1.(b), on a $P_A(X) = (X-1)^{n+1}$.
   Donc $1$ est l'unique valeur propre de $A$.
   Ainsi, si $A$ était diagonalisable, alors $A$ serait semblable à la matrice unité $\mathrm{I}_{n+1}$.
   On aurait donc $A = \mathrm{I}_{n+1}$.
   Ce qui est manifestement faux car $f \neq \mathrm{Id}$.
   Donc $A$ n'est pas diagonalisable et par conséquent, $f$ n'est pas diagonalisable.

**Exercice 12 : CCINP 69**

**On considère la matrice** $A = \begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ a & 0 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **où $a$ est un réel.**

1. **Déterminer le rang de $A$.**
2. **Pour quelles valeurs de $a$, la matrice $A$ est-elle diagonalisable ?**

**Corrigé** :

1. Après calcul, on trouve $\det A = a(a+1)$.
   **Premier cas** : $a \neq 0$ et $a \neq -1$
   Alors, $\det A \neq 0$ donc $A$ est inversible.
   Donc $\operatorname{rg} A = 3$.
   **Deuxième cas** : $a = 0$
   $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ donc $\operatorname{rg} A = 2$.

   **Troisième cas** : $a = -1$
   $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ donc $\operatorname{rg} A \geqslant 2$ car les deux premières colonnes de $A$ sont non colinéaires.

   Or $\det A = 0$ donc $\operatorname{rg} A \leqslant 2$.
   On en déduit que $\operatorname{rg} A = 2$.
2. Notons $\chi_A$ le polynôme caractéristique de $A$.
   $\det(\lambda I_n - A) = \begin{vmatrix} \lambda & -a & -1 \\ -a & \lambda & -1 \\ -a & -1 & \lambda \end{vmatrix}$
   Alors, en ajoutant à la première colonne la somme des deux autres puis, en soustrayant la première ligne aux deux autres lignes, on trouve successivement :
   $\det(\lambda I_n - A) = (\lambda - a - 1)\begin{vmatrix} 1 & -a & -1 \\ 1 & \lambda & -1 \\ 1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - a - 1)\begin{vmatrix} 1 & -a & -1 \\ 0 & \lambda + a & 0 \\ 0 & -1+a & \lambda+1 \end{vmatrix}$.
   Donc, en développant par rapport à la première colonne,
   $\det(\lambda I_n - A) = (\lambda - a - 1)(\lambda + a)(\lambda + 1)$.
   Donc $\chi_A = (X - a - 1)(X + a)(X + 1)$.
   Les racines de $\chi_A$ sont $a+1$, $-a$ et $-1$.
   $a + 1 = -a \Longleftrightarrow a = -\frac{1}{2}$.
   $a + 1 = -1 \Longleftrightarrow a = -2$.
   $-a = -1 \Longleftrightarrow a = 1$.
   Ce qui amène aux quatre cas suivants :

   **Premier cas** : $a \neq 1$, $a \neq -2$ et $a \neq -\frac{1}{2}$
   Alors $A$ admet trois valeurs propres disctinctes.
   Donc $A$ est diagonalisable.
   **Deuxième cas** : $a = 1$
   $\chi_A = (X-2)(X+1)^2$.
   Alors $A$ est diagonalisable si et seulement si $\dim E_{-1} = 2$, c'est-à-dire $\operatorname{rg}(A + \mathrm{I}_3) = 1$.
   Or $A + \mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ donc $\operatorname{rg}(A + \mathrm{I}_3) = 1$.
   Donc $A$ est diagonalisable.
   **Troisième cas** : $a = -2$
   Alors, $\chi_A = (X+1)^2(X-2)$.
   $A + \mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
   Les deux premières colonnes de $A + \mathrm{I}_3$ ne sont pas colinéaires, donc $\operatorname{rg}(A + \mathrm{I}_3) \geqslant 2$.
   De plus, $-1$ est valeur propre de $A$, donc $\operatorname{rg}(\mathrm{A} + \mathrm{I}_3) \leqslant 2$.
   Ainsi, $\operatorname{rg}(A + \mathrm{I}_3) = 2$ et $\dim E_{-1} = 1$.

Or l'ordre multiplicité de la valeur propre $-1$ dans le polynôme caractéristique est 2.
On en déduit que $A$ n'est pas diagonalisable.
**Quatrième cas** : $a=-\frac{1}{2}$

$\chi_A=(X-\frac{1}{2})^2(X+1)$. $A-\frac{1}{2}\mathrm{I}_3=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1\\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1\\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

Les deux premières colonnes de $A-\frac{1}{2}\mathrm{I}_3$ sont non colinéaires, donc $\mathrm{rg}(A-\frac{1}{2}\mathrm{I}_3)\geqslant 2$.
De plus, $\frac{1}{2}$ est valeur propre donc $\mathrm{rg}(A-\frac{1}{2}\mathrm{I}_3)\leqslant 2$.
Ainsi, $\mathrm{rg}(A-\frac{1}{2}\mathrm{I}_3)=2$ et $\dim E_{\frac{1}{2}}=1$.
Or l'ordre de multiplicité de la valeur propre $\frac{1}{2}$ dans le polynôme caractéristique est 2.
On en déduit que $A$ est non diagonalisable.

**Exercice 13 : CCINP 70**

**Soit** $A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ **.**

1. **Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de $A$. $A$ est-elle diagonalisable ?**
2. **Soit $(a,b,c)\in\mathbb{C}^3$ et $B=a\mathrm{I}_3+bA+cA^2$, où $\mathrm{I}_3$ désigne la matrice identité d'ordre 3.**
   **Déduire de la question 1. les éléments propres de $B$.**

---

**Solution** :

1. $\chi_A(X)=(X^3-1)$ donc Sp$A=\{1,j,j^2\}$.
   On en déduit que $A$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ car elle admet trois valeurs propres distinctes.
   On pose $E_1(A)=\mathrm{Ker}(A-\mathrm{I}_3)$, $E_j(A)=\mathrm{Ker}(A-j\mathrm{I}_3)$ et $E_{j^2}(A)=\mathrm{Ker}(A-j^2\mathrm{I}_3)$.

   Après résolution, on trouve $E_1(A)=$ Vect$\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ et $E_j(A)=$ Vect$\left(\begin{pmatrix}1\\j^2\\j\end{pmatrix}\right)$.

   Et, par conjugaison (comme $A$ est à coefficients réels), $E_{j^2}(A)=$ Vect$\left(\begin{pmatrix}1\\j\\j^2\end{pmatrix}\right)$.

2. Soit $e=(e_1,e_2,e_3)$ la base canonique de $\mathbb{C}^3$, vu comme un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.
   Soit $f$ l'endomorphisme canoniquement associé à $A$.

   On pose $e'_1=(1,1,1)$, $e'_2=(1,j^2,j)$, $e'_3=(1,j,j^2)$ et $e'=(e'_1,e'_2,e'_3)$.
   D'après 1., $e'$ est une base de vecteurs propres pour $f$.

   Soit $P$ la matrice de passage de $e$ à $e'$. On a $P=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & j^2 & j\\ 1 & j & j^2\end{pmatrix}$. Soit $D=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & j & 0\\ 0 & 0 & j^2\end{pmatrix}$.

   Alors, $D=P^{-1}AP$, c'est-à-dire $A=PDP^{-1}$.
   On en déduit que $B=aI_3+bPDP^{-1}+cPD^2P^{-1}=P\left(aI_3+bD+cD^2\right)P^{-1}$.

   C'est-à-dire, si on pose $Q=a+bX+cX^2$, alors $B=P\begin{pmatrix}Q(1) & 0 & 0\\ 0 & Q(j) & 0\\ 0 & 0 & Q(j^2)\end{pmatrix}P^{-1}$.

   On en déduit que $B$ est diagonalisable et que les valeurs propres, distinctes ou non, de $B$ sont $Q(1)$, $Q(j)$ et $Q(j^2)$.
   **Premier cas** : $Q(1)$, $Q(j)$ et $Q(j^2)$ sont deux à deux distincts

   $B$ possède trois valeurs propres distinctes : $Q(1)$, $Q(j)$ et $Q(j^2)$.

De plus, on peut affirmer que :

$E_{Q(1)}(B) = E_1(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ $E_{Q(j)}(B) = E_j(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\j^2\\j\end{pmatrix}\right)$ et $E_{Q(j^2)}(B) = E_{j^2}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\j\\j^2\end{pmatrix}\right)$.

**Deuxième cas** : deux valeurs exactement parmi $Q(1)$, $Q(j)$ et $Q(j^2)$ sont égales.
Supposons par exemple que $Q(1) = Q(j)$ et $Q(j^2) \neq Q(1)$.

$B$ possède deux valeurs propres distinctes : $Q(1)$ et $Q(j^2)$.
De plus, on peut affirmer que :

$E_{Q(1)}(B) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\j^2\\j\end{pmatrix}\right)$ et $E_{Q(j^2)}(B) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\j\\j^2\end{pmatrix}\right)$.

**Troisième cas** : $Q(1) = Q(j) = Q(j^2)$.
$B$ possède une unique valeur propre : $Q(1)$.

De plus, on peut affirmer que $B = Q(1)\mathrm{I}_3$ et $E_{Q(1)}(B) = \mathbb{C}^3$.

**Exercice 14 : Matrices compagnes**

**Calculer le polynôme caractéristique de la matrice compagne ($a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{K}$)**

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

**Vérifier que ses sous-espaces propres sont des droites puis montrer qu'elle est diagonalisable si et seulement si le polynôme caractéristique est simplement scindé.**

# 3 Applications de la diagonalisation

## a Calculs de puissances

**Méthode 2**

Si on diagonalise $A = PDP^{-1}$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$, valable dans $\mathbb{Z}$ si $A$ est inversible c'est-à-dire si $0$ n'est pas valeur propre.

**Exercice 15**

**Trouver le terme général des suites $x, y, z$ telles que pour tout $n$,**

$$\begin{cases} x_{n+1} = y_n + z_n \\ y_{n+1} = x_n + z_n \\ z_{n+1} = x_n + y_n \end{cases}$$

On pose $X_n = \begin{pmatrix}x_n\\y_n\\z_n\end{pmatrix}$, alors $X_{n+1} = AX_n$ donc pour tout $n$, $X_n = A^n X_0$.

Or $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix}1&1&1\\-1&0&1\\0&-1&1\end{pmatrix}$. On calcule $P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&-2&1\\1&1&-2\\1&1&1\end{pmatrix}$.

On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $A^n = P\begin{pmatrix}(-1)^n&0&0\\0&(-1)^n&0\\0&0&2^n\end{pmatrix}P^{-1}$ et donc $A^n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2^n+2(-1)^n & 2+(-1)^{n+1} & 2+(-1)^{n+1}\\ 2+(-1)^{n+1} & 2^n+2(-1)^n & 2+(-1)^{n+1}\\ 2+(-1)^{n+1} & 2+(-1)^{n+1} & 2^n+2(-1)^n\end{pmatrix}$.

D'où $x_n, y_n, z_n$ exprimés en fonction de $x_0, y_0, z_0$.
On peut même calculer le résultat sans calculer $P^{-1}$ !

Si on pose $Y_n = P^{-1}X_n$, $Y_{n+1} = DY_n$ donc $Y_n = D^n Y_0$ et donc $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^n(\lambda+\mu)+2^n\nu \\ (-1)^{n+1}\lambda+2^n\mu \\ (-1)^{n+1}\mu+2^n\nu \end{pmatrix}$.

### b Commutant d'une matrice (complément)

**Définition 8 : Commutant d'une matrice carrée**

Le **commutant** de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est $\mathscr{C}(A) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid AM = MA\}$.

**Propriété 26 : Structure**

*C'est un sous-espace vectoriel et même une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*

**Démonstration**

C'est le noyau de l'endomorphisme $M \mapsto AM - MA$, et stable par produit. ■

**Méthode 3 : Commutant d'une matrice diagonalisable $A = PDP^{-1}$**

1. Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on pose $N = P^{-1}MP$ et on vérifie que $M$ commute avec $A$ si et seulement si $N$ commute avec $D$. C'est facile en passant par les endomorphismes !
2. On détermine directement $\mathscr{C}(D)$ en traduisant $DN = ND$. (Rappel : il est facile de multiplier à gauche ou à droite par une matrice diagonale !)
3. On en déduit $\mathscr{C}(A)$ qui est l'ensemble des $PNP^{-1}$.

**Exercice 16**

**Déterminer le commutant de** $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **puis de** $B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

---

**Solution** : $A$ est semblable à $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

On a, pour $N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, $DN = ND$ si et seulement si $\begin{pmatrix} -a & -b & -c \\ -d & -e & -f \\ 2g & 2h & 2i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b & 2c \\ -d & -e & 2f \\ -g & -h & 2i \end{pmatrix}$ si et seulement si $c = f = g = h = 0$ si et seulement si $N$ de la forme $\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ d & e & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$.

Alors $\mathscr{C}(A) = \left\{P\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ d & e & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}P^{-1},\ a, b, c, d, i \in \mathbb{R}\right\}$. C'est un espace vectoriel de dimension 5.

**Exercice 17 : CCINP 73**

**On pose** $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.

1. **Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de** $A$.
2. **Déterminer toutes les matrices qui commutent avec la matrice** $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

   **En déduire que l'ensemble des matrices qui commutent avec** $A$ **est** $\mathrm{Vect}(I_2, A)$.

---

**Corrigé** :

1. On obtient le polynôme caractéristique $\chi_A = (X-3)(X+2)$ et donc $\mathrm{Sp}A = \{-2, 3\}$.
   Après résolution des équations $AX = 3X$ et $AX = -2X$, on obtient :
   $E_3 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)$ et $E_{-2} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}\right)$.

2. Soit $N = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
   $ND = DN \iff \begin{cases} -2b & = & 3b \\ 3c & = & -2c \end{cases} \iff b = c = 0 \iff N$ diagonale.
   On a $A = PDP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

   Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

   $AM = MA \Leftrightarrow PDP^{-1}M = MPDP^{-1} \Leftrightarrow D(P^{-1}MP) = (P^{-1}MP)D \Leftrightarrow P^{-1}MP$ commute avec $D$.
   C'est-à-dire, $AM = MA \Leftrightarrow P^{-1}MP = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \Leftrightarrow M = P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}P^{-1}$.

   Donc, l'espace des matrices commutant avec $A$ est $C(A) = \left\{ P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}P^{-1} \text{ avec } (a,d) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

   C'est un plan vectoriel.
   De plus, pour des raisons d'inclusion ($\mathrm{I}_2 \in C(A)$ et $A \in C(A)$) et d'égalité des dimensions, $C(A) = \mathrm{Vect}(\mathrm{I}_2, A)$.

### C Racines carrées d'une matrice (complément)

**Définition 9 : Racines carrées d'une matrice**

Si $M, A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $M$ est une **racine carrée** de $A$ lorsque $M^2 = A$. On note $\mathcal{R}(A)$ l'ensemble des racines carrées de $A$.

**Remarque**

**R 20 –** $\mathcal{R}(A) \subset \mathcal{C}(A)$ : si $M$ est une racine de $A$, alors $A$ est un polynôme en $M$ donc commute avec $M$.

**R 21 –** Cette fois, on n'a plus un sous-espace vectoriel en général.

**Méthode 4 : Racines carrées d'une matrice diagonalisable** $A = PDP^{-1}$

Même principe que pour le commutant.

1. Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on pose $N = P^{-1}MP$ et on vérifie que $M$ racine carrée de $A$ si et seulement si $N$ racine carrée de $D$.
2. On détermine directement $\mathcal{R}(D)$ en traduisant $N \in \mathcal{C}(D)$ et $N^2 = D$.
3. On en déduit $\mathcal{R}(A)$ qui est l'ensemble des $PNP^{-1}$.

À noter que cette méthode s'adapte à d'autres équations que $M^2 = A$.

**Exercice 18**

**Déterminer les racines carrées de** $B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$**, puis, pour** $\mathbb{K} = \mathbb{R}$**, celles de** $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$A$ est semblable à $D=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ : $A=PDP^{-1}$.

$\mathscr{C}(D)=\left\{\begin{pmatrix}a&b&0\\d&e&0\\0&0&i\end{pmatrix},\ a,b,c,d,i\in\mathbb{R}\right\}$.

$N=\begin{pmatrix}a&b&0\\d&e&0\\0&0&i\end{pmatrix}$ racine de $D$ ssi $\begin{pmatrix}a^2+bd&b(a+e)&0\\d(a+e)&e^2+bd&0\\0&0&i^2\end{pmatrix}=D$

Mais si on a $a+e\neq 0$, alors $b=d=0$ et $a^2=-1$ ce qui n'est pas possible sur $\mathbb{R}$.

Donc $N$ racine de $D$ si et seulement si $e=-a$, $a^2+bd=-1$ et $j^2=2$.

$\mathscr{R}(A)=\left\{P\begin{pmatrix}s\sqrt{-1-bd}&b&0\\d&-s\sqrt{-1-bd}&0\\0&0&t\sqrt{2}\end{pmatrix}P^{-1};\ b,d\in\mathbb{R};\ bd\leqslant -1; s,t\in\{-1,1\}\right\}$.

### d Suites récurrentes

**Méthode 5 : Terme général d'une suite vérifiant une relation de récurrence linéaire homogène** $u_{n+p}=\sum_{i=0}^{p-1}\alpha_i u_{n+i}$

1. On pose $X_n=\begin{pmatrix}u_n\\\vdots\\u_{n+p-1}\end{pmatrix}$.
2. On se ramène à $X_{n+1}=AX_n$, ce qui donne pour tout $n$, $X_n=A^nX_0$.
3. On peut, en diagonalisant $A=PDP^{-1}$ (si possible), s'affranchir du calcul de $P^{-1}$ puis de celui de $A^n$ en posant $Y_n=P^{-1}X_n$, ce qui donne $X_n=PD^nY_0$.
4. On en déduit l'expression de $u_n$ en fonction de $n$.

**Exercice 19**

**Déterminer le terme général des suites complexes vérifiant** $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+3}=-u_{n+2}-u_{n+1}-u_n$ **en posant** $X_n=\begin{pmatrix}u_n\\u_{n+1}\\u_{n+2}\end{pmatrix}$.

**Remarque**

**R 22** – Quel est le polynôme caractéristique pour l'ordre 2 : $u_{n+2}=au_{n+1}+bu_n$ ? $X_{n+1}=\begin{pmatrix}u_{n+1}\\u_{n+2}\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}0&1\\b&a\end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix}u_n\\u_{n+1}\end{pmatrix}=AX_n$.

On calcule $\chi_A=X^2-aX-b$ : équation/polynôme caractéristique.

# IV TRIGONALISATION

Soit $(E,+,\cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n\neq 0$, $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $u\in\mathscr{L}(E)$.

## 1 Définition

**Définition 10 : endomorphisme et matrice trigonalisable**

- $u\in\mathscr{L}(E)$ est **trigonalisable** lorsqu'il existe une base $\mathscr{B}$ de $E$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)\in\mathscr{T}_n(\mathbb{K})$.
- $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est **trigonalisable** lorsqu'elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure, c'est-à-dire lorsqu'il existe $P\in\mathscr{GL}_n(\mathbb{K})$ et $T\in\mathscr{T}_n(\mathbb{K})$ tel que $A=PTP^{-1}$.

**Propriété 27 : Caractérisation géométrique**

*$A$ est trigonalisable si et seulement si n'importe quel endomorphisme qu'elle représente l'est.*

**Remarque**

**R 23** – Être diagonalisable implique être trigonalisable. La réciproque est fausse !

**R 24** – $u$ est trigonalisable si et seulement s'il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de $E$ telle que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k)$ est stable par $u$. On parle de **drapeau** stable par $u$.

**R 25** – $u$ est trigonalisable si et seulement s'il existe une base dans laquelle sa matrice est triangulaire supérieure si et seulement s'il existe une base dans laquelle sa matrice est triangulaire inférieure. En effet, une permutation des vecteurs de la base permet de passer de l'un à l'autre.

**Propriété 28 : Caractérisation par $\chi$ scindé**

*$u$ (respectivement $A$) est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé.*

**Démonstration**

($\Longrightarrow$) (Matriciellement) Si $A$ est trigonalisable, on a $P$ inversible et $T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (*) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}$ telle que $A = PTP^{-1}$.

Alors $\chi_A = \prod_{k=1}^{n} (X - \lambda_i)$ est scindé.

($\Longleftarrow$) (Géométriquement) **Méthode classique**

- Si $n = 1$, il n'y a rien à faire.
- Si $n \geqslant 2$ et $\chi_u$ est scindé, il y a au moins une valeur propre $\lambda \in \mathbb{K}$. Soit $x \in E$ un vecteur propre associé. On complète la famille libre $(x)$ en une base $\mathcal{B} = (x, e_2, \dots, e_n)$ de $E$.

  Dans cette base, la matrice de $u$ est de la forme $A = \begin{pmatrix} \lambda & (*) \\ (0) & A_1 \end{pmatrix}$ où $A_1 \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$.

  Si $E_1 = \mathrm{Vect}(e_2, \dots, e_n)$ et $u_1 \in \mathcal{L}(E_1)$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}_1 = (e_2, \dots, e_n)$ de $E_1$ est $A_1$, alors, par un déterminant triangulaire par bloc, $\chi_A = (X - \lambda)\chi_{A_1}$.

  Donc $\chi_{A_1}$ est scindé. Il suffit donc de raisonner par récurrence : si on sait trigonaliser $u_1$ en dimension $n - 1 \geqslant 1$ pour $n$ fixé, on a $P_1 \in \mathcal{GL}_{n-1}(\mathbb{K})$ et $T_1$ triangulaire telle que $A_1 = P_1 T_1 P_1^{-1}$.

  Alors $A = \begin{pmatrix} \lambda & (*) \\ (0) & P_1 T_1 P_1^{-1} \end{pmatrix}$.

  On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & (0) \\ (0) & P_1 \end{pmatrix}$ et on vérifie que $\begin{pmatrix} 1 & (0) \\ (0) & P_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & (0) \\ (0) & P_1^{-1} \end{pmatrix} = I_n$ donc $P$ inversible d'inverse $\begin{pmatrix} 1 & (0) \\ (0) & P_1^{-1} \end{pmatrix}$

  et $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & (0) \\ (0) & P_1^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda & (*) \\ (0) & A_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & (0) \\ (0) & P_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & (*) \\ (0) & T_1 \end{pmatrix} \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$. ■

**Corollaire 5 : Trigonalisation automatique dans $\mathbb{C}$**

*Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, tous les endomorphismes et toutes les matrices sont trigonalisables.*

**Remarque**

**R 26** – Si $u$ (respectivement $A$) est trigonalisable, comme le polynôme caractéristique est scindé, on a automatiquement que si $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont les valeurs propres distinctes de de multiplicités respectives $m_1, \dots, m_p$, alors

$\sum_{i=1}^{p} m_i\lambda_i = \operatorname{tr} u$ (ou $\operatorname{tr} A$) et $\prod_{i=1}^{p} \lambda_i^{m_i} = \det u$ (ou $\det A$). Cela saute d'ailleurs au yeux avec la matrice triangulaire !

## 2 Mise en pratique en dimension 2 ou 3

On peut toujours mettre en application la démonstration par récurrence constructive.
Voici deux exemples particuliers.

### Méthode 6 : Trigonalisation en dimension 2

On suppose que $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$ est **trigonalisable mais non diagonalisable**, alors $A$ admet une valeur propre double $\lambda$ et $\dim E_\lambda(A) = 1$.

1. On détermine $\binom{x_1}{y_1}$ vecteur propre associé à $\lambda$.
2. On complète en $\left(\binom{x_1}{y_1}, \binom{x_2}{y_2}\right)$ base de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ (par exemple en piochant dans la base canonique).
3. Alors $A = P\begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}P^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$.

On peut même se ramener à une matrice $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ en cherchant $\binom{x_2}{y_2}$ tel que $A\binom{x_2}{y_2} = \binom{x_1}{y_1} + \lambda\binom{x_2}{y_2}$.

**Exercice 20**

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 1 \\ -9 & -1 \end{pmatrix}$$

1. **$A$ est-elle trigonalisable ? Diagonalisable ?**
2. **Trigonaliser (resp. diagonaliser) $A$ si elle est trigonalisable (resp. diagonalisable).**

### Méthode 7 : Trigonalisation en dimension 3 avec deux valeurs propres

On suppose que $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{K})$ est **trigonalisable mais non diagonalisable**, et que $A$ admet une valeur propre simple $\lambda$ et une valeur propre double $\mu$.

Alors $\dim E_\lambda(A) = \dim E_\mu(A) = 1$.

On montre que $A$ est semblable à $T = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 1 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$.

1. On détermine $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ vecteur propre associé à $\lambda$ et $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ vecteur propre associé à $\mu$.
2. On cherche $\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}$ tel que $A\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}$.
3. On vérifie que $\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}\right)$ est un base de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
4. Alors $A = P\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 1 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}P^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}$.

**Remarque**

**R 27** – Il se peut aussi que $A$ ait une valeur propre triple.

# V ENDOMORPHISMES ET MATRICES NILPOTENTES

## 1 Définition

**Définition 11 : Endomorphisme et matrice nilpotents et indice de nilpotence**

$u \in \mathscr{L}(E)$ (respectivement $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$) est dit **nilpotent** lorsqu'il existe $p \geqslant 1$ tel que $u^p = 0_{\mathscr{L}(E)}$ (respectivement $A^p = 0_n$).

Le plus petit $p \geqslant 1$ vérifiant cette propriété est appelé **indice de nilpotence**.

**Remarque**

**R 28 –** $u$ est nilpotent si et seulement si n'importe quelle matrice qui le représente l'est.

**Exemple**

**E 12 –** L'endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$ de dérivationest nilpotent d'indice $n+1$.

**E 13 –** $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & 0 \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ nilpotente d'indice $n$.

**E 14 –** Plus généralement, une matrice triangulaire stricteest nilpotente d'indice au plus $n$.

## 2 Propriétés

**Propriété 29 : Caractérisation**

*$u$ est nilpotent si et seulement si $u$ est trigonalisable et $\operatorname{Sp} u = \{0\}$.*
*Dans ce cas, $\chi_u = X^n$ où $n = \dim E$.*
*Idem avec des matrices.*

**Démonstration**

Si $u$ est nilpotent, sa seule valeur propre complexe est $0$ (si $\lambda$ est valeur propre, on a $x \neq 0$ tel que $u(x) = \lambda x$ et alors $u^p(x) = \lambda^p x = 0$ donc $\lambda^p = 0$ donc $\lambda = 0$) donc son polynôme caractéristique est $X^n$ qui est scindé.

Si $u$ est trigonalisable et n'a que $0$ comme valeur propre, il est représenté par une matrice triangulaire supérieure stricte $A$, donc il est nilpotent d'indice au plus $n$ (car $A^n = 0_n$). ■

**Remarque**

**R 29 –** En particulier, un endomorphisme nilpotent n'est presque jamais diagonalisable !

**Propriété 30 : Majoration de l'indice de nilpotence**

*L'indice de nilpotence est toujours majoré par $n = \dim E$.*

**Démonstration**

On a vu une justification dans la preuve précédente.

Autre preuve possible : le polynôme caractéristique est $X^n$ et c'est un polynôme annulateur d'après le théorème de Cayley-Hamilton.

Autre preuve possible : si $p$ l'indice de nilpotence et $a \in E$ tel que $u^{p-1}(a) \neq 0$, alors on montre que $(a, u(a), \dots, u^{p-1}(a))$ est libre, donc $p \leqslant n$. ■