1. Groupe symétrique

1 Déterminer tous les morphismes de $(\mathfrak{S}_n, \circ)$ dans $(\{\pm 1\}, \times)$.

Solution de 1 :

Ce sont la signature et l'application constante 1 suivant l'image des transpositions, qui engendrent $\mathfrak{S}_n$.
Cette image est la même pour toutes les transpositions car elles sont conjuguées.
Si c'est -1, on obtient ε, sinon, on obtient $\sigma \mapsto 1$.

2 Théorème de Cayley

En s'intéressant aux translations, démontrer le théorème de Cayley qui affirme que tout groupe fini d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ est isomorphe à un sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$.

Solution de 2 : Théorème de Cayley

Si $a \in G$, $\left(f_a : x \mapsto a\,x\right) \in \mathfrak{S}(G)$.
Alors $\Phi : a \in G \mapsto g_a \in \mathfrak{S}(G)$ est un morphisme de groupes injectif, donc G est isomorphe à $\mathrm{Im}\,\Phi$ sous-groupe de $\mathfrak{S}(G)$, puis isomorphe à un sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$ via une numérotation des éléments de G.

3 ENS

1. Quel est le nombre minimal de permutations nécessaires pour engendrer $\mathfrak{S}_n$?
2. Si σ est une permutation, si $\Omega_1, \ldots, \Omega_p$ sont les orbites de σ, on note
$$N(\sigma) = \sum_{i=1}^{p} (|\Omega_i| - 1)$$
Montrer que, si τ est une transposition,
$$N(\tau\sigma) = N(\sigma) \pm 1$$
3. Quel est le nombre minimal de transpositions nécessaires pour engendrer $\mathfrak{S}_n$?

Solution de 3 : ENS

1. Question très discriminante : cela ne s'invente pas. Si on ne l'a pas déjà rencontré, on a peu de chances de penser tout de suite que deux permutations suffisent.
Bien sûr, on commencerait par dire à l'interrogateur que les transpositions engendrent $\mathfrak{S}_n$.
Mais des transpositions, il y en a beaucoup (combien ? demande l'interrogateur...).
Alors on peut regarder $n = 3$, et en discutant avec l'interrogateur on progressera.
On peut en fait démontrer que les permutations $\tau = (1\ 2)$ et $c = (1\ 2\ \cdots\ n)$ suffisent à engendrer $\mathfrak{S}_n$.
Et c'est plus facile quand on sait que les transpositions de la forme $(i\ \ i+1)$ engendre $\mathfrak{S}_n$ (cf TD normal...)
On vérifie en effet, par conjugaison, que $c^i \tau c^{-i} = \left(c^i(1)\ c^i(2)\right) = (i+1\ \ i+2)$ ce qui suffit à conclure...

2. Posons $\tau=(a\ b)$. Décomposons σ en « cycles disjoints »,

$$\sigma=\gamma_1\cdots\gamma_p$$

où chaque γ_k a pour support Ω_k. On fait rentrer les points fixes éventuels de σ dans cette décomposition de la manière évidente suivante : si $\sigma(c)=c$, on considère (c) comme un cycle de support $\{c\}$.
Examinons deux cas :
• Si a et b sont dans la même orbite pour σ : on peut supposer

$$c_1=(a\ c_1\ c_2\cdots\ c_p\ b\ d_1\ d_2\cdots d_q)$$

où p et/ou q peuvent être nuls, et les autres cycles ne concernent pas a ni b. Alors

$$\tau c_1=(a\ c_1\ c_2\ \cdots\ c_p)(b\ d_1\ d_2\cdots d_q) \tag{1}$$

(τ « casse » le cycle). Rien n'étant changé par ailleurs, on calcule que l'on a

$$N(\tau\sigma)=N(\sigma)+1$$

• Si a et b sont dans deux orbites différentes pour σ : on relit (1) sous la forme

$$\tau\ (a\ c_1\ c_2\ \cdots\ c_p)(b\ d_1\ d_2\cdots d_q)=(a\ c_1\ c_2\cdots\ c_p\ b\ d_1\ d_2\cdots d_q)$$

(τ « soude » les cycles) et on obtient $N(\tau\sigma)=N(\sigma)-1$.

3. Une décomposition classique de $c=(1\ 2\ \cdots\ n)$ en transpositions, l'une d'elles étant $(1\ 2)$, montre qu'il suffit de $n-1$ transpositions. On montre qu'on ne peut pas faire mieux. En effet, si

$$c=\tau_1\ \cdots\ \tau_p$$

alors

$$N(c)=n-1=N(\tau_1\ \cdots\ \tau_p)=(\pm1)+\cdots+(\pm1)\leqslant p$$

ce qui donne $p\geqslant n-1$. Le nombre cherché est donc $n-1$.

4 X-ENS – Groupe résoluble

Soit G un groupe. On note $D(G)$ le sous-groupe de G engendré par les éléments de la forme $xyx^{-1}y^{-1}$ avec x et y dans G. On note D^n la n^{e} itérée de l'opération D et on dit que G est résoluble lorsqu'il existe $n\in\mathbb{N}^*$ tel que $D^n(G)=\{e\}$.

1. On suppose qu'il existe deux groupes N et H et deux morphismes $i:N\to G$ et $s:G\to H$ avec i injectif, s surjectif et $\operatorname{Im} i=\operatorname{Ker} s$.
   Montrer que G est résoluble si et seulement si N et H le sont.
2. Montrer que $\mathfrak{A}_5$ est engendré par les 3-cycles, puis que $D(\mathfrak{A}_5)=\mathfrak{A}_5$ puis, à l'aide du morphisme de signature, que $\mathfrak{S}_5$ n'est pas résoluble.

La notion de groupe résoluble a pour origine la théorie de Galois. Le fait que le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ ne soit pas résoluble pour $n\geqslant 5$ traduit l'impossibilité de résoudre par radicaux l'équation polynomiale générale de degré $\geqslant 5$.

Solution de 4 : X-ENS – Groupe résoluble

FGN 1 1.16

1. ▪ Supposons G résoluble et n un entier tel que $D^n(G)=\{e\}$. Notons $g=xyx^{-1}y^{-1}$ avec x et y dans G. Alors $s(g)=s(x)s(y)s(x)^{-1}s(y)^{-1}\in D(H)$ donc $s(D(G))\subset D(H)$.
   Vérifions que, par surjectivité de s, il y a égalité. En effet, si $h=aba^{-1}b^{-1}$ avec $a,b\in H$, on a $x,y\in G$ tels que $a=s(x)$ et $b=s(y)$ et $h=s\left(xyx^{-1}y^{-1}\right)\in s(D(G))$ donc $D(H)\subset(D(G))$.
   Alors $D^n(H)=s(D^n(G))=s(\{e\})=\{s(e)\}=\{e_H\}$ et H est résoluble.
   On a de même $i(D(N))\subset D(G)$ donc $\{e\}\subset i(D^n(N))\subset D^n(G)=\{e\}$ donc $i(D^n(N))=\{e\}$ et, par injectivité, $D^n(N)=\{e_N\}$ donc N est résoluble.

- Supposons .réciproquement que N et H soient résolubles et des entiers n et m tels que $D^n(H) = \{e_H\}$ et $D^m(N) = \{e_N\}$.
  Avec le calcul précédent, $s(D^n(G)) = D^n(H) = \{e_H\}$ donc $D^n(G) \subset \operatorname{Ker} s = \operatorname{Im} i$. On a alors
  $$D^{m+n}(G) = D^m(D^n(G)) \subset D^m(\operatorname{Im} i)$$
  Or $x \in N \mapsto i(x) \in \operatorname{Im} i$ est surjective donc $D^m(\operatorname{Im} i) = i(D^m(N)) = i(\{e_N\}) = \{e\}$ et G est bien résoluble.

2.
- Pour montrer que $\mathfrak{A}_5$ est engendré par les 3-cycles, il suffit de montrer qu'une composée de deux permutations de la forme $(i\ \ i+1)$ s'écrit comme composée de 3-cycles (avec le résultat vu en TD normal).
  Or $(1\ 2) \circ (2\ 3) = (1\ 2\ 3)$ et $(1\ 2) \circ (3\ 4) = (1\ 2\ 3) \circ (2\ 3\ 4)$ ce qui permet de conclure.
- On veut montrer que tout élément de $\mathfrak{A}_5$ est dans $D(\mathfrak{A}_5)$. Il suffit de le vérifier pour les 3-cycles.
  On calcule par exemple
  $$(1\ 2\ 3) \circ (3\ 4\ 5) \circ (1\ 2\ 3)^{-1} \circ (3\ 4\ 5)^{-1} = (1\ 4\ 5) \circ (3\ 5\ 4) = (1\ 4\ 3)$$
  On a arrive alors à montrer que tout 3-cycle est dans $D(\mathfrak{A}_5)$ et on en conclut que $D(\mathfrak{A}_5) = \mathfrak{A}_5$.
- $s = \varepsilon : \mathfrak{S}_5 \to \{\pm 1\}$ est un morphisme de groupes surjectif. $i : \sigma \in \mathfrak{A}_5 \mapsto \sigma \in \mathfrak{S}_5$ est un morphisme de groupes injectif. $\operatorname{Ker} \varepsilon = \mathfrak{A}_5 = \operatorname{Im} i$.
  Avec ce qui précède, $\mathfrak{A}_5$ n'est pas résoluble donc $\mathfrak{S}_5$ ne l'est pas non plus.

2. Déterminant

5 Centrale

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à ± 1.

Montrer que $\det A$ est un entier divisible par 2^{n-1}.

Solution de 5 : Centrale

Ajouter la première (ou la dernière, ou...) ligne (ou colonne) à toutes les autres. Vérifier qu'alors toutes les lignes sauf la première ne contiennent que des entiers pairs. On peut alors mettre 2 en facteur dans chacune de ces lignes, et utiliser la multilinéarité...

6 Centrale

1. Montrer que le déterminant de la matrice carrée
$$\begin{pmatrix} 0 & & (1) \\ & \ddots & \\ (1) & & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$$
est un entier impair.
2. Dans un troupeau de $2n+1$ vaches (avec $n \in \mathbb{N}$), on peut toujours, en retirant une vache former deux groupes de n vaches de même masse totale. Montrer que chaque vache à la même masse.

Solution de 6 : Centrale

Numérotons de 1 à $2n+1$ les vaches. Le fait que, pour chaque vache, l'enlever et de former deux groupes de n vaches de même masse totale se traduit par un système d'équation de matrice
$$A = \begin{pmatrix} 0 & & (\pm 1) \\ & \ddots & \\ (\pm 1) & & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n+1}(\{-1, 0, 1\})$$

telle que $\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}\in\operatorname{Ker}A$ (car chaque groupe contient n vaches) et si $m_1,\dots,m_{2n+1}$ sont les masses des vaches, $\begin{pmatrix}m_1\\ \vdots\\ m_{2n+1}\end{pmatrix}\in\operatorname{Ker}A$ (car les groupes ont même masse totale.)

Le problème revient donc à montrer que $\operatorname{Ker}A$ est de dimension 1, c'est-à-dire que A est de rang $2n$.
On sait déjà que A n'est pas inversible car son noyau n'est pas trivial.
On va en extraire une matrice inversible de taille $2n$.

Soit $B=\begin{pmatrix}0 & & (1)\\ & \ddots & \\ (1) & & 0\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_{2n}(\mathbb{R})$. Quatre méthodes :

- Par le déterminant de Hurwitz, on a
$$\det B=(-1)^{2n}+2n(-1)^{2n-1}=1-2n\in 2\mathbb{Z}+1$$
donc B est inversible.
- On retrouve le résultat par multilinéarité et caractère alterné du déterminant : en notant $\mathscr{B}=(e_1,\dots,e_{2n})$ la base canonique de $\mathbb{R}^{2n}$ et $C=\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$, $\det B=\det_{\mathscr{B}}(C-e_1,\dots,C-e_n)$. En utilisant la multilinéarité et le caractère alterné, il ne reste que des déterminants avec au plus un fois la colonne C.
Ainsi,
$$\det B=\underbrace{(-1)^{2n}\det I_n}_{\text{aucun }C}+\underbrace{\sum_{k=1}^{n}\begin{vmatrix}-1 & & 1 & & \\ & \ddots & \vdots & & (0)\\ & & 1 & & \\ & & \vdots & \ddots & \\ (0) & & 1 & & -1\end{vmatrix}}_{\text{un seul }C}=(-1)^{2n}+2n(-1)^{2n-1}=1-2n\in 2\mathbb{Z}+1$$
en reconnaissant un déterminant triangulaire par blocs.
- On peut aussi dans $\det B$ retrancher à toutes les colonnes la première , puis ajouter toutes les colonnes à la première :
$$\det B=\begin{vmatrix}0 & 1 & \cdots & \cdots & 1\\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2n-1 & 1 & \cdots & \cdots & 1\\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1\end{vmatrix}=(-1)^{2n-1}(2n-1)\in 2\mathbb{Z}+1.$$
- On peut aussi calculer $B^2=\begin{pmatrix}2n-1 & & (2n-2)\\ & \ddots & \\ (2n-2) & & 2n-1\end{pmatrix}=(2n-2)B+(2n-1)I_{2n}$.
En réduisant modulo 2, on obtient $\det\left(B^2\right)=(\det B)^2\equiv\det(I_{2n})\ [2]$ soit $(\det B)^2\equiv 1\ [2]$ soit encore $\det B\equiv 1\ [2]$ et donc $\det B$ est impair.
On en déduit aussi que B est inversible d'inverse $B^{-1}=\dfrac{1}{2n-1}B-\dfrac{2n-2}{2n-1}I_{2n}$.

Finalement, en extrayant par exemple les n premières lignes et colonnes de A dans une matrice A', on obtient $\det A'\in\mathbb{Z}$ et $\det A'\equiv\det B\ [2]$ donc $\det A'$ est impair et donc non nul.

Finalement $\operatorname{rg}A=2n$, $\dim\operatorname{Ker}A=1$ par théorème du rang et donc $\begin{pmatrix}m_1\\ \vdots\\ m_{2n+1}\end{pmatrix}$ est colinéaire à $\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$: toutes les vaches ont la même masse [1].

1. Et c'est encore vrai avec des anti-vaches de masse négative !

7 X-Centrale

Calculer le déterminant de Vandermonde « incomplet »

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \ldots\ldots & x_1^{k-1} & x_1^{k+1} & \ldots\ldots & x_1^n \\ 1 & x_2 & \ldots\ldots & x_2^{k-1} & x_2^{k+1} & \ldots\ldots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \ldots\ldots & x_n^{k-1} & x_n^{k+1} & \ldots\ldots & x_n^n \end{vmatrix}$$

en le faisant apparaître comme mineur d'un déterminant de Vandermonde.

Solution de 7 : X-Centrale

Il faut utiliser la formule :

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \ldots\ldots & x_1^{k-1} & x_1^k & x_1^{k+1} & \ldots\ldots & x_1^n \\ 1 & x_2 & \ldots\ldots & x_2^{k-1} & x_2^k & x_2^{k+1} & \ldots\ldots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \ldots\ldots & x_n^{k-1} & x_n^k & x_n^{k+1} & \ldots\ldots & x_n^n \\ 1 & x & \ldots\ldots & x^{k-1} & x^k & x^{k+1} & \ldots\ldots & x^n \end{vmatrix} = V(x_1,\ldots,x_n)\prod_{i=1}^{n}(x-x_i)$$

avec $V(x_1,\ldots,x_n) = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j - x_i)$ (voir cours, déterminant de Vandermonde). Le déterminant cherché est le mineur $(n+1,k+1)$ du déterminant ci-dessus, c'est-à-dire $(-1)^{n+k}$ fois le cofacteur de x^k. Or on peut écrire

$$V(x_1,\ldots,x_n)\prod_{i=1}^{n}(x-x_i) = V(x_1,\ldots,x_n)(x^n - \sigma_1 x^{n-1} + \ldots + (-1)^{n-k}\sigma_{n-k}x^k + \ldots + (-1)^n\sigma_n)$$

(avec des notations habituelles pour les fonctions symétriques élémentaires de $x_1,\ldots,x_n$). Le déterminant cherché vaut donc

$$\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j - x_i) \sum_{\substack{J\subset[\![1,n]\!] \\ |J|=n-k}} \prod_{j\in J} x_j$$

---

8 Mines

Soit $P = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n \in \mathbb{R}[X]$ et $\alpha_0,\ldots,\alpha_n$ réels distincts. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $(a_0,\ldots,a_n)$ pour que $\big(P(\alpha_0X), P(\alpha_1X),\ldots,P(\alpha_nX)\big)$ soit une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Solution de 8 : Mines

On pense à dire que les polynômes donnés sont bien une famille de $n+1$ éléments de $\mathbb{R}_n[X]$ qui est de dimension $n+1$, ils forment une base si et seulement si leur déterminant dans la base canonique est non nul. Ce déterminant est

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_0 & \ldots\ldots\ldots\ldots & a_0 \\ a_1\alpha_0 & a_1\alpha_1 & \ldots\ldots\ldots\ldots & a_1\alpha_n \\ \vdots & & & \vdots \\ a_n\alpha_0^n & a_n\alpha_1^n & \ldots\ldots\ldots\ldots & a_n\alpha_n^n \end{vmatrix}$$

qui vaut, par linéarité par rapport à chaque ligne, $a_0a_1\ldots a_n V(\alpha_0,\ldots,\alpha_n)$ et donc est non nul si et seulement si tous les a_k sont non nuls (V pour Vandermonde, bien sûr).

---

9 **ENS** Soit A un ensemble fini de cardinal $m \geqslant 2$ et $U_1, \ldots, U_n$ des parties non vides deux à deux distinctes de A. On suppose qu'il existe un entier $a \geqslant 0$ tel que si $i \neq j$, $\left|U_i \cap U_j\right| = a$. Montrer que $n \leqslant m$.

Solution de 9 : ENS

Soient $a_1, \ldots, a_m$ les éléments de A. L'idée va être de reconnaître un produit matriciel dans l'écriture de $\left|U_i \cap U_j\right|$ avec des fonctions indicatrices.

On a en effet, pour $i \neq j$, $\left|U_i \cap U_j\right| = \sum_{k=1}^{m} \mathbb{1}_{U_i \cap U_j}(a_k) = \sum_{k=1}^{m} m_{k,i} m_{k,j}$ avec $m_{i,k} = \mathbb{1}_{U_j}(a_k)$ (1 si $a_k \in U_j$, 0 sinon).

En notant $M \in \mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ la matrice des $m_{i,j}$, et $x_i = |U_i|$, on a alors $H = M^{\intercal} M = \begin{pmatrix} x_1 & a & \cdots & a \\ a & x_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & \cdots & a & x_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et on commence à voir le lien avec le déterminant de Hürwitz.

Quel rapport avec une inégalité entre n et m ? Nous allons pouvoir calculer le déterminant de H qui va nous donner une information sur son rang et comparer avec le rang de M.

Le déterminant de Hurwitz nous fournit $\det H = \prod_{k=1}^{n}(x_k - a) + a \sum_{k=1}^{n} \prod_{k \neq i}(x_i - a)$. On montre alors qu'il est non nul.

Pour tout i, $a \leqslant x_i$ avec égalité pour au plus un i car les U_i sont distincts deux à deux : en effet, s'il y a égalité pour un i, alors pour tout $j \neq i$, $U_i \cap U_j = U_i$ donc $U_i \subset U_j$.

On en déduit que $\det H > 0$ donc H est inversible, puis $n = \operatorname{rg} H \leqslant \operatorname{rg} M \leqslant m$.

---

10 **Écrit Mines - Déterminant de Cauchy** On considère un entier $n > 0$ et deux suites finies $(a_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ et $(b_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ de réels telles que $a_k + b_k \neq 0$ pour tout $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Pour tout entier m tel que $0 < m \leqslant n$, le *déterminant de Cauchy* d'ordre m est défini par :

$$D_m = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{a_1 + b_1} & \dfrac{1}{a_1 + b_2} & \cdots & \dfrac{1}{a_1 + b_m} \\ \dfrac{1}{a_2 + b_1} & \dfrac{1}{a_2 + b_2} & \cdots & \dfrac{1}{a_2 + b_m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{1}{a_m + b_1} & \dfrac{1}{a_m + b_2} & \cdots & \dfrac{1}{a_m + b_m} \end{vmatrix}.$$

On définit la fraction rationnelle $R = \dfrac{\prod_{k=1}^{n-1}(X - a_k)}{\prod_{k=1}^{n}(X + b_k)}$.

1. Montrer que si on écrit la décomposition en éléments simples de R sous la forme

$$R = \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{X + b_k},$$

alors

$$A_n D_n = R(a_n) D_{n-1}.$$

On pourra pour cela considérer le déterminant obtenu à partir de D_n en remplaçant la dernière colonne par $\begin{pmatrix} R(a_1) \\ R(a_2) \\ \vdots \\ R(a_n) \end{pmatrix}$.

2. En déduire que

$$D_n = \frac{\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} (a_j - a_i)(b_j - b_i)}{\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n} (a_i + b_j)}.$$

Solution de 10 : Écrit Mines - Déterminant de Cauchy

1. Remarquons que la décomposition en éléments simples ne s'écrit comme cela que si les b_k sont deux à deux distincts. On peut rajouter sans inconvénient cette hypothèse à l'énoncé, car si elle n'est pas vérifiée alors $D_n = 0$ (deux colonnes égales) et donc la formule finale est vraie.
Considérons, comme le suggère l'énoncé,

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots\cdots & \frac{1}{a_1+b_{n-1}} & R(a_1) \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \cdots\cdots & \frac{1}{a_2+b_{n-1}} & R(a_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ \frac{1}{a_{n-1}+b_1} & \frac{1}{a_{n-1}+b_2} & \cdots\cdots & \frac{1}{a_{n-1}+b_{n-1}} & R(a_{n-1}) \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \frac{1}{a_n+b_2} & \cdots\cdots & \frac{1}{a_n+b_n} & R(a_n) \end{vmatrix}.$$

Les $R(a_k)$ sont nuls pour $k = 1, \ldots, n-1$. On développe par rapport à la dernière colonne, on obtient

$$\Delta = R(a_n) D_{n-1}$$

Mais d'autre part, pour tout j,

$$R(a_j) = \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{a_j + b_k}$$

On peut alors calculer Δ en soustrayant à sa dernière colonne $\displaystyle\sum_{s=1}^{n-1} A_s c_s$ où $c_1, \ldots c_{n-1}$ sont les $n-1$ premières colonnes de Δ. On obtient

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots\cdots & \frac{1}{a_1+b_{n-1}} & \frac{A_n}{a_1+b_n} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \cdots\cdots & \frac{1}{a_2+b_{n-2}} & \frac{A_n}{a_2+b_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ \frac{1}{a_{n-1}+b_1} & \frac{1}{a_{n-1}+b_2} & \cdots\cdots & \frac{1}{a_{n-1}+b_{n-1}} & \frac{A_n}{a_{n-1}+b_n} \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \frac{1}{a_n+b_2} & \cdots\cdots & \frac{1}{a_n+b_n} & \frac{A_n}{a_n+b_n} \end{vmatrix}.$$

et donc par linéarité par rapport à la dernière colonne on obtient bien $\Delta = A_n D_n$, on a donc bien

$$\boxed{A_n D_n = R(a_n) D_{n-1}}$$

2. Calculons le A_n précédent par des méthodes habituelles : multiplication par $X + b_n$, évaluation en $-b_n$.
On obtient

$$A_n = \frac{\prod_{k=1}^{n-1}(-b_n - a_k)}{\prod_{k=1}^{n-1}(-b_n + b_k)} = \frac{\prod_{k=1}^{n-1}(a_k + b_n)}{\prod_{k=1}^{n-1}(b_n - b_k)}.$$

Et donc, par la formule calculée en **1**,

$$D_n = \frac{\prod_{k=1}^{n-1}(b_n - b_k)}{\prod_{k=1}^{n-1}(a_k + b_n)} \times \frac{\prod_{k=1}^{n-1}(a_n - a_k)}{\prod_{k=1}^{n}(a_n + b_k)} \times D_{n-1}$$

La formule demandée s'en déduit par récurrence. L'initialisation est probablement plus rassurante pour $n=2$ (on évite les produits vides), mais pour $n=1$ ça marche quand même.

11 Classiques autour de la comatrice

Soit $n\geqslant 2$, $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathrm{Com}\,A$ sa comatrice.

1. Montrer que $\mathrm{rg}(\mathrm{Com}\,A)=\begin{vmatrix} n & \text{si } \mathrm{rg}\,A=n \\ 1 & \text{si } \mathrm{rg}\,A=n-1 \\ 0 & \text{si } \mathrm{rg}\,A\leqslant n-2\end{vmatrix}$
2. Calculer $\det(\mathrm{Com}\,A)$.
3. Calculer $\mathrm{Com}(\mathrm{Com}\,A)$ pour $n\geqslant 3$.
4. Soit $B\in\mathscr{GL}_n(\mathbb{K})\cup\{0_n\}$. Résoudre l'équation $\mathrm{Com}\,A=B$ d'inconnue $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
   On peut montrer qu'il y a aussi des solutions lorsque B est de rang 1 mais c'est nettement plus difficile.
5. Montrer que si $A,B\in\mathscr{GL}_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{Com}(AB)=\mathrm{Com}\,A\,\mathrm{Com}\,B$ et expliquer comment généraliser ce résultat à toutes les matrices.
6. Si A est une matrice de projection, que peut-on dire de $\mathrm{Com}\,A$?
7. **X** – Soit $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ de déterminant nul. Montrer que toutes les matrices carrées de taille 2 extraites de la comatrice de A sont de déterminant nul.

Solution de 11 : Classiques autour de la comatrice

1. Si A est inversible $\mathrm{Com}\,A$ l'est aussi d'après la formule de la comatrice donc est de $\boxed{\text{rang } n.}$

   Si $\mathrm{rg}\,A\leqslant 2$, tous ses mineurs son nuls (pas de matrice extraite d'ordre $n-1$ inversible), donc $\mathrm{Com}\,A=0_n$ est de $\boxed{\text{rang nul.}}$

   Si $\mathrm{rg}\,A=n-1$, avec la formule de la comatrice $\mathrm{Com}(A)^{\intercal}A=0$ donc $\mathrm{Im}\,A\subset\mathrm{Ker}\,\mathrm{Com}(A)^{\intercal}$ donc $\dim\mathrm{Ker}\,\mathrm{Com}(A)^{\intercal}\geqslant n-1$ donc $\mathrm{rg}\,\mathrm{Com}\,A=\mathrm{rg}\,\mathrm{Com}(A)^{\intercal}\leqslant 1$.

   Or $\mathrm{Com}(A)\neq 0_n$ car au moins un mineur n'est pas nul avec $\mathrm{rg}\,A=n-1$, donc $\boxed{\mathrm{rg}\,\mathrm{Com}\,A=1.}$

2. Ainsi, si A n'est pas inversible, $\boxed{\det(\mathrm{Com}\,A)=0.}$

   Sinon, avec la formule de la comatrice, $\det A\times\det(\mathrm{Com}\,A)=(\det A)^n$ donc $\boxed{\det(\mathrm{Com}\,A)=(\det A)^{n-1}}$ formule en fait valable dans tous les cas.

3. Soit $n\geqslant 3$. Si A n'est pas inversible, $\mathrm{rg}(\mathrm{Com}\,A)\leqslant 1\leqslant n-2$ donc $\boxed{\mathrm{Com}(\mathrm{Com}\,A)=0_n.}$

   Sinon, $\mathrm{Com}\,A=(\det A)\left(A^{-1}\right)^{\intercal}$ donc
   $$\mathrm{Com}(\mathrm{Com}\,A)=\det(\mathrm{Com}\,A)\left((\mathrm{Com}\,A)^{-1}\right)^{\intercal}=(\det A)^{n-1}\left(\frac{1}{\det A}A\right)$$
   donc, dans tous les cas, $\boxed{\mathrm{Com}(\mathrm{Com}\,A)=(\det A)^{n-2}A.}$

4. Avec la première question, les solutions de $\mathrm{Com}\,A=0_n$ sont $\boxed{\text{les matrices de rang au plus } n-2.}$

   Supposons B inversible et A solution. Alors $\mathrm{Com}(\mathrm{Com}\,A)=(\det A)^{n-2}A=\mathrm{Com}\,B$ inversible donc nécessairement , A l'est aussi.
   En prenant le déterminant, $\det(\mathrm{Com}\,A)=(\det A)^{n-1}=\det B$.

   $\boxed{\text{Il n'y a pas de solution si } \det B<0 \text{ et } n \text{ impair.}}$

   Sinon, on a $\det A=\varepsilon\sqrt[n-1]{\det B}$ où $\varepsilon=+1$ si n est pair et $\varepsilon=\pm 1$ si n et impair.

   On a alors $A=(\det A)^{2-n}\,\mathrm{Com}\,B=\varepsilon(\det B)^{\frac{2-n}{n-1}}\,\mathrm{Com}\,B=\varepsilon\dfrac{\sqrt[n-1]{\det B}}{\det B}\mathrm{Com}\,B=\varepsilon\sqrt[n-1]{\det B}\left(B^{-1}\right)^{\intercal}$.

   Réciproquement, écrivons $A=\lambda C$ où $\lambda=\varepsilon\sqrt[n-1]{\det B}$, $\varepsilon=+1$ si n est pair et $\varepsilon=\pm 1$ si n et impair et $C=\left(B^{-1}\right)^{\intercal}$.

   Alors $\mathrm{Com}\,A=(\det A)\left(A^{-1}\right)^{\intercal}=\dfrac{\lambda^n\det C}{\lambda}B=\dfrac{\lambda^{n-1}}{\det B}B=B$.

   On a donc finalement

- aucune solution si $\det B < 0$ et n impair,
- une unique solution $\dfrac{\sqrt[n-1]{\det B}}{\det B}\,\mathrm{Com}\,B = \sqrt[n-1]{\det B}\left(B^{-1}\right)^{\mathsf{T}}$ si n est pair,
- deux solutions distinctes $\pm\dfrac{\sqrt[n-1]{\det B}}{\det B}\,\mathrm{Com}\,B = \pm\sqrt[n-1]{\det B}\left(B^{-1}\right)^{\mathsf{T}}$ si n est impair et $\det B > 0$.

5. La formule de la comatrice permet de démontrer le résultat sans trop de difficultés pour des matrices inversibles, on conclut par densité de $\mathscr{GL}_n(\mathbb{K})$, les cœfficients de la comatrice étant polynomiaux en les cœfficients de la matrice de départ.

6. Si A est une matrice de projection, $\boxed{\mathrm{Com}\,A \text{ l'est aussi,}}$ avec la question précédente.

7. $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ n'est pas inversible. Donc $\mathrm{rg}(\mathrm{Com}\,A) \leqslant 1$. Donc toutes les matrices carrées de taille 2 extraites de la comatrice de A sont de déterminant nul.

12 Résultant de deux polynômes

Soit $\mathbb{K}$ un corps, $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme de degré n sur $\mathbb{K}$. Pour m entier naturel donné on définit la matrice de format $(m+n)\times m$:

$$M(P,m) = \begin{pmatrix} a_0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ a_n & & & a_0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix}$$

Soit deux polynômes P et Q de degrés respectifs $n \geqslant 1$ et $m \geqslant 1$.

On définit $\rho(P,Q)$ comme le déterminant de la matrice définie par blocs $\big(M(P,m)\big|M(Q,n)\big)$.

1. De quelle famille de polynômes (et dans quel espace ?) la matrice $\big(M(P,m)\big|M(Q,n)\big)$ est-elle la matrice dans la base canonique ?
2. Montrer l'équivalence des trois propriétés suivantes :
   (i) P et Q ont un diviseur commun de degré supérieur ou égal à 1.
   (ii) il existe un polynôme U non nul de degré au plus $m-1$ et un polynôme V non nul de degré au plus $n-1$ tels que $UP = VQ$.
   (iii) $\rho(P,Q) = 0$.

   On suggère de montrer (i) $\iff$ (ii) et (ii) $\iff$ (iii).
3. Calculer $\rho(P,P')$ pour $P = aX^2 + bX + c$ puis pour $P = X^3 + pX + q$. Interpréter.
4. En utilisant de simples outils d'analyse, donner une condition nécessaire et suffisante pour que le polynôme à cœfficients réels $X^3 + pX + q$ ait trois racines réelles distinctes.
5. **ENS** – Soient a, b deux nombres complexes algébriques : il existe des polynômes non nuls P et Q à cœfficients rationnels dont a et b sont respectivement racines.
   (a) Montrer que $P(a+b-X)$ et Q ont une racine commune.
   (b) En considérant par exemple le polynôme $P(Y-X)$ comme polynôme de $(\mathbb{Q}(Y))[X]$, montrer qu'il existe un polynôme à cœfficients rationnels dont $a+b$ est racine.
   (c) Déterminer un tel polynôme pour $a = \sqrt{2}$ et $b = \sqrt{3}$.