TD ∗ d'Algèbre Linéaire

1 **Mines** Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Quels sont les endomorphismes de E qui ont la même matrice dans toutes les bases de E ?

Solution de 1 : Mines

Le plus commode est probablement d'étudier le problème sous forme matricielle ; soit u un tel endomorphisme, A sa matrice dans une base $\mathscr{B}$. Alors, pour tout $P \in \mathscr{GL}_n(\mathbb{K})$,

$$P^{-1}AP = A$$

(car $P^{-1}AP$ désigne la matrice de u dans la base $\mathscr{C}$ telle que P soit la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{C}$). Autrement dit, pour tout $P \in \mathscr{GL}_n(\mathbb{K})$,

$$PA = AP$$

et donc A commute avec toutes les matrices inversibles. Désignons comme d'habitude par $E_{i,j}$ les matrices élémentaires $n \times n$. Pour tout couple (i,j) dans $[1,n]^2$, $I_n + E_{i,j}$ est inversible (elle est triangulaire, avec des 1 et éventuellement un 2 (si $i = j$) sur la diagonale. Donc, pour tout couple (i,j),

$$(I_n + E_{i,j})A = A(I_n + E_{i,j})$$

et donc

$$E_{i,j}A = AE_{i,j}$$

On en déduit (exercice classique) que A est une matrice λI_n où $\lambda \in \mathbb{K}$. Et donc $u = \lambda Id_E$, les endomorphismes cherchés sont les homothéties (on a raisonné par condition nécessaire, mais il est réciproquement assez clair qu'une homothétie $u = \lambda Id_E$ a même matrice dans toute base).

2 **Centrale** Soit E un espace vectoriel de dimension finie, f et g dans $\mathscr{L}(E)$.

Montrer que $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Im} g$ si et seulement s'il existe h dans $\mathscr{L}(E)$ tel que $f = g \circ h$.

Solution de 2 : Centrale

Il y a un sens qui n'est pas difficile.

Supposons $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Im} g$. soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Pour tout i, $f(e_i) \in \operatorname{Im} g$. Soit, pour chaque i, u_i tel que $f(e_i) = g(u_i)$. Il y a une unique application linéaire qui envoie chaque e_i sur u_i. Notons-la h.

Alors f et $g \circ h$ coïncident sur la base $(e_1, \dots, e_n)$, ce qui conclut.

3 **ENS-Centrale-Mines** Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Résoudre l'équation $X + X^\intercal = (\operatorname{tr} X)A$. d'inconnue $X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Solution de 3 : ENS-Centrale-Mines

Si X est solution, on obtient en prenant la trace que $2 \operatorname{tr} X = \operatorname{tr} X \operatorname{tr} A$.

Dans le cas où $\operatorname{tr} X = 0$, on obtient que X est antisymétrique et, réciproquement, les matrices antisymétriques sont bien solutions.

Dans le cas où $\operatorname{tr} X \neq 0$, on obtient $\operatorname{tr} A = 2$, A symétrique puis $B = X - \dfrac{\operatorname{tr} X}{2} A$ est antisymétrique avec $X = \dfrac{\operatorname{tr} X}{2} A + B$.

Réciproquement, les matrices $X = \lambda A + B$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ et B antisymétrique sont solutions.

Finalement, si $\operatorname{tr} A \neq 2$ ou A non symétriques, les solutions sont les matrices antisymétriques. Sinon, les solutions sont les $\lambda A + B$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ et B antisymétrique.

4 **ENS** Soit A, B, C trois matrices de $\mathcal{M}_n\mathbb{K})$.

Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $C = AXB$.

Solution de 4 : ENS

On considère les endomorphismes canoniquement associés. Soit u, v, w trois endomorphismes dans $\mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$. A quelle condition nécessaire et suffisante existe-t-il un endomorphisme ϕ de $\mathbb{K}^n$ tel que $w = u \circ \phi \circ v$?

Une **condition nécessaire** est : $\operatorname{Ker} v \subset \operatorname{Ker} w$ et $\operatorname{Im} w \subset \operatorname{Im} u$. Cette condition est-elle suffisante ? supposons-la dorénavant réalisée.

On a alors : $\forall x \in \operatorname{Ker} v \qquad 0 = w(x) = (u \circ \phi \circ v)(x)$

et donc, si G est un supplémentaire de $\operatorname{Ker} v$ dans $\mathbb{K}^n$,

$$w = u \circ \phi \circ v \quad \Longleftrightarrow \quad \forall x \in G \quad w(x) = (u \circ \phi \circ v)(x)$$

On nomme alors v_1 l'isomorphisme induit par v de G sur $\operatorname{Im}(v)$:

$$w = u \circ \phi \circ v \quad \Longleftrightarrow \quad \forall y \in \operatorname{Im} v \quad (w \circ v_1^{-1})(y) = (u \circ \phi)(y)$$

Soit $(e_1, \ldots, e_r)$ une base de $\operatorname{Im} v$; pour tout i, $(w \circ v_1^{-1})(e_i)$ est dans $\operatorname{Im} w$, donc dans $\operatorname{Im} u$.

Soit alors f_i tel que $u(f_i) = (w \circ v_1^{-1})(e_i)$.

On complète la famille $(e_1, \ldots, e_r)$ en une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de $\mathbb{K}^n$, et on considère l'unique endomorphisme ϕ qui à chaque e_i associe f_i si $1 \leqslant i \leqslant r$, 0 si $i > r$.

La relation $(w \circ v_1^{-1})(y) = (u \circ \phi)(y)$ est vérifiée sur une base de $\operatorname{Im} v$, donc sur $\operatorname{Im} v$. Ce qui achève la démonstration.

Une CNS est : $\operatorname{Ker} B \subset \operatorname{Ker} C$ et $\operatorname{Im} C \subset \operatorname{Im} A$.

5 **Centrale-Mines** Soit $V = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ AMA = 0\}$ avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang r.

Montrer que V est un espace vectoriel. Quelle est sa dimension ?

Solution de 5 : Centrale-Mines

Méthode matricielle : Il n'est pas difficile de montrer que V est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: il contient (0), et est stable par combinaison linéaire, car si $AMA = 0$ et $AM'A = 0$, alors $A(M + \lambda M')A = 0$.

Commençons par envisager le cas de la matrice $A = J_r$; si on découpe M en blocs :

$$M = \begin{array}{r} r \text{ lignes} \left\{ \right. \\ n-r \text{ lignes} \left\{ \right. \end{array} \left(\begin{array}{cc} \overbrace{\qquad M_1 \qquad}^{r \text{ colonnes}} & \overbrace{\qquad M_2 \qquad}^{n-r \text{ colonnes}} \\ M_3 & M_4 \end{array} \right)$$

On voit que, les r premières colonnes de la matrice J_r étant celles de la matrice unité et les $n-r$ suivantes étant nulles,

$$M J_r = \begin{pmatrix} M_1 & (0) \\ M_3 & (0) \end{pmatrix}$$

et, en raisonnant de même sur les colonnes,

$$J_r M J_r = \begin{pmatrix} M_1 & (0) \\ (0) & (0) \end{pmatrix}$$

Donc $M \in V \iff M_1 = (0)$; V est donc ici l'ensemble des matrices de la forme

$$M = \begin{array}{r} r \text{ lignes} \\ n-r \text{ lignes} \end{array} \begin{array}{l} \{ \\ \{ \end{array} \begin{pmatrix} \overbrace{\qquad (0) \qquad}^{r \text{ colonnes}} & \overbrace{\qquad M_2 \qquad}^{n-r \text{ colonnes}} \\ M_3 & M_4 \end{pmatrix}$$

et on voit que $\dim V = n^2 - r^2$ (tous les n^2 cœfficients sauf ceux du bloc $r \times r$ haut gauche).

Soit maintenant A de rang r quelconque, il existe P et Q dans $\mathscr{GL}_n\mathbb{R}$ telles que $A = P J_r Q$. Donc

$$M \in V \iff P J_r Q M P J_r Q = 0 \iff J_r Q M P J_r = 0$$

Appelons V_r le sous-espace V étudié précédemment, pour le cas $A = J_r$. On a donc

$$M \in V \iff Q M P \in V_r$$

ce qui permet de définir

$$\phi : \left| \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & V_r \\ M & \longmapsto & QMP \end{array} \right.$$

qui est linéaire, et bijective (de réciproque $M \mapsto Q^{-1} M P^{-1}$). Et donc

$$\dim V = \dim V_r = n^2 - r^2$$

Méthode vectorielle : Soit $\mathscr{B}$ la base (par exemple) canonique de l'espace vectoriel (par exemple) $\mathbb{K}^n$ (on pourrait travailler avec une base quelconque d'un espace vectoriel de dimension n quelconque, cela ne changerait rien). On sait que l'application

$$\psi : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{L}(\mathbb{K}^n) & \longrightarrow & \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \\ f & \longmapsto & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \end{array} \right.$$

est un isomorphisme. Soit $u = \psi^{-1}(A)$, c'est-à-dire l'endomorphisme canoniquement associé à A. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, et soit v canoniquement associé à M ($v = \psi^{-1}(M)$). Alors

$$M \in V \iff AMA = 0 \iff u \circ v \circ u = \tilde{0}$$

où $\tilde{0}$ désigne l'endomorphisme nul. On est donc ramené à l'étude de $\mathscr{V}$, où

$$\mathscr{V} = \{v \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^n),\ u \circ v \circ u = \tilde{0}\}$$

Comme ψ induit un isomorphisme de $\mathscr{V}$ sur V, ces deux espaces ont même dimension. Analysons un peu le problème :

$$\begin{aligned} u \circ v \circ u = \tilde{0} &\iff \forall x \in \mathbb{K}^n \quad (u \circ v \circ u)(x) = 0_{\mathbb{K}^n} \\ &\iff \forall x \in \mathbb{K}^n \quad v\big(u(x)\big) \in \mathrm{Ker}\, u \\ &\iff v\big(\mathrm{Im}\, u\big) \subset \mathrm{Ker}\, u \end{aligned}$$

Soit G un supplémentaire de $\mathrm{Im}\, u$ (dans $\mathbb{K}^n$). Le résultat sur la définition d'une application linéaire par ses restrictions à des sous-espaces supplémentaires permet de dire que l'application

$$\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{L}(\mathbb{K}^n) & \longrightarrow & \mathscr{L}(\mathrm{Im}\, u, \mathbb{K}^n) \times \mathscr{L}(G, \mathbb{K}^n) \\ v & \longmapsto & (v|_{\mathrm{Im}\, u}, v|_G) \end{array} \right.$$

est un isomorphisme. Mais, par l'analyse précédente,

$$\mathscr{V} = \varphi^{-1}\Big(\mathscr{L}(\operatorname{Im} u, \operatorname{Ker} u) \times \mathscr{L}(G, \mathbb{K}^n)\Big)$$

Mais

$$\begin{aligned}
\dim\Big(\mathscr{L}(\operatorname{Im} u, \operatorname{Ker} u) \times \mathscr{L}(G, \mathbb{K}^n)\Big) &= \dim\Big(\mathscr{L}(\operatorname{Im} u, \operatorname{Ker} u)\Big) + \dim\Big(\mathscr{L}(G, \mathbb{K}^n)\Big) \\
&= \dim\big(\operatorname{Im} u\big)\ \dim\big(\operatorname{Ker} u\big) + \dim(G)\ \dim(\mathbb{K}^n) \\
&= r(n-r) + (n-r)n \\
&= n^2 - r^2
\end{aligned}$$

ce qui permet de conclure.

6

Combien y-a-t-il de matrices inversibles dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ où p est premier ?

Solution de 6 :

Il y a $p^n - 1$ premiers vecteurs colonnes possibles : seul le vecteur nul est interdit. Pour chacun de ces choix, il y a p colonnes liées avec ce premier vecteur colonne, donc $p^n - p$ choix possibles pour le deuxième vecteur colonne (qui doit être indépendant du premier). Les deux premiers vecteurs colonnes choisis engendrent un plan vectoriel qui a p^2 vecteurs (il est isomorphe à $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2$), donc il y a $p^n - p^2$ choix pour le troisième vecteur colonne (indépendant des deux premiers). Par une petite récurrence, on trouve le nombre cherché :

$$|\mathscr{GL}_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})| = (p^n - 1)(p^n - p)(p^n - p^2)\dots(p^n - p^{n-1})$$

7

X-ENS-Centrale Démontrer que deux sous-espaces vectoriels d'un espace de dimension finie sont de même dimension si et seulement s'ils admettent un supplémentaire commun.

Variante Montrer que si deux sous-espaces admettent un supplémentaire commun, ils sont isomorphes, et que la réciproque est vraie en dimension finie et fausse en général.

Solution de 7 : X-ENS-Centrale

Il y a un sens immédiat.

Supposons que F et G sont deux sous-espaces de E de même dimension p.

Première méthode : On y va progressivement, on peut s'appuyer sur un dessin, en petite dimension : droites, plan... La preuve est constructive : on va donner un moyen de trouver un supplémentaire commun.

- On commence par traiter le cas où $F \oplus G = E$. Si $\mathscr{B}_F = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathscr{B}_G = \big(f_1, \dots, f_n\big)$, alors on pose $H = \operatorname{Vect}\big(e_1 + f_1, \dots, e_n + f_n\big)$ et on vérifie que H est un supplémentaire commun à F et G.
- Puis on traite le cas où $F \cap G = \{0_E\}$. Pour se ramener au cas précédent, on pose $K = F \oplus G$. On a un supplémentaire H' commun à F et G dans K. On se donne ensuite H'' un supplémentaire de K dans E et on montre que $H = H' + H''$ est un supplémentaire commun à F et G dans E.
- Enfin, dans le cas, général, on considère F' et G' des supplémentaires de $F \cap G$ dans F et G respectivement. Ils ont même dimension et sont d'intersection nulle. Ils admettent donc un supplémentaire commun H' dans $F' \oplus G'$.

  Si H'' est un supplémentaire de $F' \oplus G'$ dans E, alors $H = H' + H''$ est un supplémentaire commun à F et G dans E.

Deuxième méthode : Une autre idée est de considérer un sous-espace H en somme directe avec F et G de dimension maximale d (il en existe car c'est le cas de $\{0_E\}$).

On a alors $p+d \leqslant \dim E = n$. Supposons $p+d < n$ et aboutissons à une contradiction. On remarque qu'en tant que réunion de sous-espaces stricts, $(F\oplus H)\cup(G\oplus H)$ ne peut être égal à E (on sait classiquement que si cette réunion était un sous-espace, alors elle serait égale à l'un ou l'autre des deux termes ce qui contredit l'hypothèse faite ici.)

On peut donc choisir $x \notin (F\oplus H)\cup(G\oplus H)$ et vérifier que $H\oplus \mathrm{Vect}\, x$ est en somme directe avec F et G ce qui contredit la maximalité de d.

Remarque : Un exercice plus difficile est de montrer que si le corps de base est infini, un espace vectoriel ne peut pas être réunion d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels stricts. Cela permet de généraliser le résultat de cet exercice à plus de deux sous-espaces.

Troisième méthode : On peut aussi raisonner par récurrence sur $n-p$. La clé de l'hérédité résidant dans le fait que si $F\neq G$, alors $F\not\subset G$ et $G\not\subset G$ ce qui permet d'introduire $x\in F\setminus G$ et $y\in G\setminus F$ et de considérer $z=x+y$ ni dans F ni dans G ce qui permet d'appliquer l'hypothèse de récurrence à $F'=F\oplus \mathrm{Vect}\, z$ et $G'=G\oplus \mathrm{Vect}\, z$ leur donnant un supplémentaire commun H'. $H=H'\oplus \mathrm{Vect}\, x$ permet de conclure.

Pour la **variante**, considérer la restriction à F de la projection sur G parallèlement à un supplémentaire commun H.

Pour un contre-exemple en dimension infinie, considérer $F=\mathbb{K}[X]$ et $G=X\mathbb{K}[X]$.

---

8 X-Centrale

En caractérisant les formes linéaires de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, montrer que tout hyperplan de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ contient une matrice inversible.

Solution de 8 : X-Centrale

On doit montrer que, si A est une matrice non nulle, il existe M inversible telle que $\mathrm{tr}(AM)=0$. Astucieusement, on écrit $A=PJ_rQ$, et on sait que $\mathrm{tr}(PJ_rQM)=\mathrm{tr}(J_rQMP)$.

On déplace donc le problème : trouver, pour tout $r\in[\![1,n]\!]$, une matrice B inversible telle que $\mathrm{tr}(J_rB)=0$. Et ça, c'est du bricolage, pas infaisable.

---

9 X

Montrer que l'ensemble des suites complexes périodiques est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, en donner une base.

Solution de 9 : X

Notons F l'ensemble des suites complexes périodiques.

Il est très facile de montrer que c'est un sous-espace de $\mathbb{C}^{\mathbf{N}}$, il suffit de remarquer qu'une combinaison linéaire d'une suite p-périodique et d'une suite q-périodique est une suite pq périodique (on peut même se contenter du ppcm de p et q).

L'idée de considérer des suites avec des 1 et des 0 n'est pas stupide, mais elle amène à se poser des questions non simples. Et peut-être faudrait-il utiliser le fait qu'on est sur $\mathbb{C}$. D'où l'idée suivante : si $\omega_1,\dots,\omega_p$ sont les racines p-ièmes de 1 (p entier naturel non nul), les p suites $\left(\omega_k^n\right)_{n\geqslant 0}, k=1,\dots,p$ sont p-périodiques. Or elles sont linéairement indépendantes : supposons en effet

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \alpha_1\omega_1^n+\cdots+\alpha_p\omega_p^n=0$$

par combinaison linéaire de ces égalités, on aurait, pour tout polynôme Q, $\alpha_1 Q(\omega_1)+\cdots+\alpha_p Q\left(\omega_p\right)=0$, ce qui, en utilisant les polynômes interpolateurs de Lagrange associés aux ω_i, donne tous les α_i nuls (on peut aussi utiliser un déterminant de Vandermonde).

Or l'espace des suites p périodiques est de dimension p (isomorphe à $\mathbb{C}^p$). On en a donc trouvé une base.

On montre alors que les suites $u_\omega = (\omega^n)_{n\in\mathbf{N}}$, où ω décrit les racines de l'unité dans $\mathbb{C}$ ($\omega \in \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}^*} \mathbb{U}_k$) forment donc une base de l'espace des suites complexes périodiques.

En effet, toute suite périodique l'est pour une certaine période p ce qui permet de l'écrire comme combinaison linéaire des $\left(\omega_k^n\right)_{n\geqslant 0}$, $k = 1,\dots,p$. Et la famille des $(\omega^n)_{n\in\mathbf{N}}$ pour $\omega \in \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}^*} \mathbb{U}_k$ est libre car si on prend une combinaison linéaire des suites de cette famille, ce sont des racines de l'unité d'ordre le produit des ordres de chacune ce qui permet de se ramener au cas prédécent.

---

10 **ENS** Déterminer les matrices $A \in \mathscr{GL}_n(\mathbb{C})$ telles que A et A^{-1} soient dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}^+)$.

Solution de 10 : ENS

C'est bien de commencer par dire qu'il y en a. Evidemment, I_n. Mais aussi les matrices de permutation, i.e. les matrices dont chaque ligne (et, partant, chaque colonne) a un coefficient égal à 1 et les autres nuls. Si on en cherche d'autres, on n'a pas l'impression que ce soit facile. Peut-être sont-elles les seules ? on peut étudier le cas $n=2$. Dans le cas général, on considère une matrice A qui vérifie les conditions demandées. On note $B = A^{-1}$. La première idée est que, si $i \neq j$,

$$\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j} = 0$$

et que cela implique (nullité d'une somme de réels positifs)

$$\forall k \in [\![1,n]\!],\ a_{i,k} = 0 \quad \text{ou} \quad b_{k,j} = 0$$

Donc, si $b_{k,j} \neq 0$, pour tout $i \neq j$ on a $a_{i,k} = 0$. Autrement dit, chaque coefficient non nul de B entraîne la nullité de beaucoup de coefficients de A...