RÉVISIONS : GROUPE SYMÉTRIQUE ET DÉTERMINANTS

- Le résultat théorique principal est que l'espace des formes n-linéaires alternées sur un espace de dimension n est de dimension 1 : il est parfois utile dans la pratique pour montrer qu'on est proportionnel au déterminant dans une base donnée.
- On se sert rarement de l'expression développée du déterminant. Les opérations élémentaires sur les lignes et/ou les colonnes permettent de faire apparaître des cœfficients nuls pour se ramener à une matrice triangulaire ou diagonale, ou pour développer par rapport à une ligne ou une colonne.
- Un développement par rapport à une ligne ou une colonne permet d'ailleurs parfois de trouver une relation de récurrence entre un déterminant de taille n et des déterminants similaires de tailles inférieures.
- Si le déterminant d'un produit est le produit des déterminants, ce n'est pas valable pour une somme. Cependant, la multilinéarité par rapport aux colonnes (ou aux lignes) alliée au caractère alterné permet parfois de simplifier des déterminants. Attention aussi : $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$.
- On essaye, dans la mesure du possible, d'obtenir une forme factorisée du déterminant, car on a besoin en général de savoir à quelles conditions il est nul (inversibilité).

1. Exercices vus en cours

1 Centre de $\mathfrak{S}_n$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$, et $(i, j) \in \mathbb{N}_n^2$ tel que $i \neq j$. Montrer que si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et $(i\ j)$ commutent, $\{i, j\}$ est stable par σ. La réciproque est-elle vraie ?
2. Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 3$ le centre de $\mathfrak{S}_n$, partie de $\mathfrak{S}_n$ des permutations commutant avec toutes les permutations de $\mathfrak{S}_n$ est $\mathscr{Z}(\mathfrak{S}_n) = \{\mathrm{id}_{[\![1,n]\!]}\}$. Étudier le cas où $n = 2$.

2 Conjugaison de cycle

Si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et c un cycle, décrire $\sigma \circ c \circ \sigma^{-1}$.

3

Montrer que si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et si p est le nombre d'orbites de σ, alors $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{n-p}$.

2. Groupe symétrique

4

Déterminer la signature de la permutation $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et déterminer une expression de σ comme produit de transpositions.

5

Déterminer l'ordre d'une composée de deux permutations à supports disjoints.

6

Décomposer en produit de cycles disjoints la permutation de $\mathfrak{S}_7$

$$\sigma = (1\ 3\ 7\ 2) \circ (4\ 5\ 1) \circ (6\ 1\ 5\ 3\ 7) \circ (1\ 3\ 5\ 7\ 2).$$

Calculer de plusieurs manières sa signature. Calculer σ^{2025}.

7 Familles génératrices de $\mathfrak{S}_n$

Soit $n \geqslant 2$. On dit qu'une famille d'éléments de $\mathfrak{S}_n$ en est une famille génératrice si toute permutation s'écrit comme composée d'éléments de la famille ou de leurs inverses.

1. Montrer que les $n-1$ transpositions $\tau_i = (1\ i)$, où $2 \leqslant i \leqslant n$, forment une famille génératrice de $\mathfrak{S}_n$.
2. Montrer que les transpositions dites simples $\tau'_i = (i\ i+1)$ où $1 \leqslant i \leqslant n-1$ engendrent $\mathfrak{S}_n$.

8 Le groupe alterné $\mathfrak{A}_n$

Soit $n \geqslant 3$. On note $\mathfrak{A}_n$ l'ensemble des permutations paires de $\mathfrak{S}_n$.

1. Montrer qu'il s'agit d'un sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$ de cardinal $\dfrac{n!}{2}$.
2. (On pourra utiliser les résultats de l'exercice précédent...)
   (a) Montrer que les 3-cycles de $\mathfrak{S}_n$ engendrent $\mathfrak{A}_n$.
   (b) Montrer plus précisément que les $(1\ 2\ i)$ pour $i \in [\![3, n]\!]$ engendrent $\mathfrak{A}_n$.

3. Déterminant

9

Calculer

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ -1 & \cdots & -1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} x+1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & x+2 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & \cdots & x+n \end{vmatrix}, \quad \det\left(\left(|i-j|\right)_{i,j \in [\![1,n]\!]}\right)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ \vdots & \ddots & \ddots & & n-1 \\ \vdots & (1) & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 2 \\ 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

10

Calculer $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$ où $a, b, c \in \mathbb{K}$, en utilisant le déterminant de Vandermonde[1] de a, b, c, x, puis directement.

---

1. 
Alexandre-Theophile Vandermonde (Paris, 1735 - 1796) est un mathématicien français. Il travaille sur les équations algébriques, préfigurant la théorie de Galois, sur la théorie des déterminants : le déterminant de Vandermonde est $\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i)$ et en analyse combinatoire, formule de Vandermonde : $\sum_{k=0}^{n} \binom{M}{k}\binom{N}{n-k} = \binom{M+N}{n}$.

11

Soient $\mathscr{B}$ une base de E de dimension n et $u \in \mathscr{L}(E)$. Démontrer que, pour toute famille $(x_1, \dots, x_n)$ d'éléments de E,

$$\sum_{k=1}^{n} \det_{\mathscr{B}}\big(x_1, \dots, x_{k-1}, u(x_k), x_{k+1}, \dots, x_n\big) = \operatorname{tr}(u) \det_{\mathscr{B}}(x_1, \dots, x_n).$$

12 Déterminant de Hürwitz

Soit $a, b \in \mathbb{K}$ et $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$. On pose $D_n(a,b) = \begin{vmatrix} x_1 & a & \cdots & a \\ b & x_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ b & \cdots & b & x_n \end{vmatrix}$.

1. Si $a \neq b$, on pose $\Delta(x)$ le déterminant obtenu en ajoutant x à chaque cœfficient de $D_n(a,b)$. Vérifier Δ est une fonction affine de x et en déduire $D_n(a,b)$.
2. On supposeque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. En déduire $D_n(a,a) = \begin{vmatrix} x_1 & a & \cdots & a \\ a & x_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & \cdots & a & x_n \end{vmatrix}$.
3. Pour $\mathbb{K}$ quelconque, retrouver l'expression de $D_n(a,a)$ en utilisant la multilinéarité du déterminant par rapport à ses colonnes.
4. **ENS** Application : Soit A un ensemble fini de cardinal $m \geqslant 2$ et $U_1, \dots, U_n$ des parties non vides deux à deux distinctes de A. On suppose qu'il existe un entier $a \geqslant 0$ tel que si $i \neq j$, $|U_i \cap U_j| = a$. Montrer que $n \leqslant m$.

13 Calcul par dérivation

1. Soient $a, b, c, d : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des fonctions dérivables et $f : x \mapsto \begin{vmatrix} a(x) & b(x) \\ c(x) & d(x) \end{vmatrix}$. Montrer que f est dérivable et que $f' : x \mapsto \begin{vmatrix} a'(x) & b(x) \\ c'(x) & d(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a(x) & b'(x) \\ c(x) & d'(x) \end{vmatrix}$.
2. Généraliser à un déterminant $n \times n$.
3. Application : calculer, pour $x, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\begin{vmatrix} 1 & \cos x & \sin x \\ 1 & \cos(x+\alpha) & \sin(x+\alpha) \\ 1 & \cos(x+\beta) & \sin(x+\beta) \end{vmatrix}$, puis $\begin{vmatrix} a & 1 & & 0 \\ a^2/2! & a & \ddots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ a^n/n! & \cdots & a^2/2! & a \end{vmatrix}$ pour $a \in \mathbb{R}$.

14 Déterminants par blocs

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $C \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, $D \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ et $M \in \mathscr{M}_{n+p}(\mathbb{K})$ la matrice par blocs $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$.

1. On suppose dans cette question seulement que $C = 0_{\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})}$. Retrouver le résultat du cours donnant le déterminant de M en remarquant que
$$M = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & I_p \end{pmatrix}.$$

2. On suppose désormais que A est inversible.

2.a) Montrer que $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D - CA^{-1}B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & A^{-1}B \\ 0 & I_p \end{pmatrix}$. puis que
$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \det A \times \det\big(D - CA^{-1}B\big).$$

2.b) On suppose de plus que $n = p$ et que A et C commutent. Montrer que
$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \det(AD - CB).$$

Donner un résultat analogue lorsque A et B commutent.

15

Calculer le déterminant de $u : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \\ M & \longmapsto & M^\intercal \end{array} \right.$ directement puis en utilisant $\mathscr{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathscr{A}_n(\mathbb{K}) = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

16 Très classique : des matrices réelles semblables dans $\mathbb{C}$ le sont dans $\mathbb{R}$

Le but est de démontrer le résultat suivant : si deux matrices A et B de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ sont semblables dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, elles le sont aussi dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Pour cela, on considère une matrice $P \in \mathscr{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $B = P^{-1}AP$, condition que l'on écrire $PB = AP$. On note alors P_1 la matrice dont les cœfficients sont les parties réelles de ceux de P, P_2 la matrice dont les cœfficients sont les parties réelles de ceux de P,

1. Démontrer que $P_1 B = AP_1$ et $P_2 B = AP_2$.
2. Démontrer que l'application $x \mapsto \det(P_1 + xP_2)$ n'est pas constamment nulle sur $\mathbb{R}$ et en déduire le résultat.

17 Grand classique

Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice à coefficients dans $\mathbb{Z}$ soit inversible et ait une inverse à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

18 Matrices de permutations

Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. On appelle matrice de permutation associée à σ la matrice $P_\sigma = \big(\delta_{i,\sigma(j)}\big)_{i,j} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Quel est l'endomorphisme canoniquement associé à P_σ ?
2. Déterminer, pour $\sigma, \rho \in \mathfrak{S}_n$, $P_\sigma \times P_\rho$.
3. Montrer que $\big(\{P_\sigma \mid \sigma \in \mathfrak{S}_n\}, \times\big)$ est un groupe isomorphe à $(\mathfrak{S}_n, \circ)$.
4. Montrer que $P_\sigma^\intercal = P_{\sigma^{-1}} = P_\sigma^{-1}$.
5. Quel est le résultat d'une multiplication à gauche ou à droite par une matrice de permutation ?
6. Calculer le déterminant de P_σ.