12 Déterminant de Hürwitz

Soit $a, b \in \mathbb{K}$ et $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$. On pose $D_n(a,b) = \begin{vmatrix} x_1 & a & \cdots & a \\ b & x_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ b & \cdots & b & x_n \end{vmatrix}$.

1. Si $a \neq b$, on pose $\Delta(x)$ le déterminant obtenu en ajoutant x à chaque cœfficient de $D_n(a,b)$. Vérifier Δ est une fonction affine de x et en déduire $D_n(a,b)$.
2. On supposeque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. En déduire $D_n(a,a) = \begin{vmatrix} x_1 & a & \cdots & a \\ a & x_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & \cdots & a & x_n \end{vmatrix}$.
3. Pour $\mathbb{K}$ quelconque, retrouver l'expression de $D_n(a,a)$ en utilisant la multilinéarité du déterminant par rapport à ses colonnes.
4. **ENS** Application : Soit A un ensemble fini de cardinal $m \geqslant 2$ et $U_1, \dots, U_n$ des parties non vides deux à deux distinctes de A. On suppose qu'il existe un entier $a \geqslant 0$ tel que si $i \neq j$, $|U_i \cap U_j| = a$. Montrer que $n \leqslant m$.

Solution de 12 : Déterminant de Hürwitz

1. $\Delta(x) = \begin{vmatrix} x_1+x & a+x & \cdots & a+x \\ b+x & x_2+x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a+x \\ b+x & \cdots & b+x & x_n+x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1+x & a-x_1 & \cdots & \cdots & a-x_1 \\ b+x & x_2-b & a-b & \cdots & a-b \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & a-b \\ b+x & 0 & \cdots & 0 & x_n-b \end{vmatrix}$ qui donne bien une fonction affine de x en développant par rapport à la première colonne.

   On écrit donc $\Delta(x) = \alpha x + \beta$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

   Comme $\Delta(-a) = \prod_{k=1}^{n}(x_k - a) = \beta - \alpha a$ et $\Delta(-b) = \prod_{k=1}^{n}(x_k - b) = \beta - \alpha b$ et comme $a \neq b$, on tire $D_n(a,b) = \Delta 0 = \beta = \dfrac{b\Delta(-a) - a\Delta(-b)}{b-a}$,

   donc $\boxed{D_n(a,b) = \dfrac{b\prod_{k=1}^{n}(x_k-a) - a\prod_{k=1}^{n}(x_k-b)}{b-a}}$.

2. Comme $b \mapsto D_n(a,b)$ est continue (car polynomiale), on en déduit que $D_n(a,a) = \lim_{b\to a} D_n(a,b)$.

   Or

$$\begin{aligned} D_n(a,b) &= \frac{b\prod_{k=1}^{n}(x_k-a) - a\prod_{k=1}^{n}(x_k-b)}{b-a} = \prod_{k=1}^{n}(x_k-a) - a \cdot \frac{\prod_{k=1}^{n}(x_k-b) - \prod_{k=1}^{n}(x_k-a)}{b-a} \\ &= \prod_{k=1}^{n}(x_k-a) - a \cdot \frac{P(b)-P(a)}{b-a} \end{aligned}$$

   où $P : x \mapsto \prod_{k=1}^{n}(x_k - x)$ est dérivable en a.

   En prenant la limite $b \to a$, on obtient $\boxed{D_n(a,a) = P(a) - aP'(a) = \prod_{k=1}^{n}(x_k-a) + a\sum_{i=1}^{n}\prod_{k\neq i}(x_i-a).}$

3. On sait que le déterminant est une forme n-linéaire alternée par rapport à ses vecteurs colonnes (exprimés dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$).

   En notant $C = \begin{pmatrix} a \\ \vdots \\ a \end{pmatrix}$, $D_n(a,a) = \det_{\mathcal{B}}(C + (x_1-a)e_1, \dots, C + (x_n-a)e_n)$. En utilisant la multilinéarité et le caractère alterné, il ne reste que des déterminants avec au plus un fois la colonne C.

Ainsi,

$$D_n(a,a)=\underbrace{\prod_{k=1}^{n}(x_k-a)\det I_n}_{\text{aucun } C}+\underbrace{\sum_{k=1}^{n}\begin{vmatrix} x_1-a & & a & & (0)\\ & \ddots & \vdots & & \\ & & a & & \\ & & \vdots & \ddots & \\ (0) & & a & & x_n-a\end{vmatrix}}_{\text{un seul } C}=\boxed{\prod_{k=1}^{n}(x_k-a)+a\sum_{k=1}^{n}\prod_{k\neq i}(x_i-a)}$$

en reconnaissant des déterminants triangulaires par blocs.

4. Soient $a_1,\dots,a_m$ les éléments de A. L'idée va être de reconnaître un produit matriciel dans l'écriture de $\left|U_i\cap U_j\right|$ avec des fonctions indicatrices.

On a en effet, pour $i\neq j$, $\left|U_i\cap U_j\right|=\sum_{k=1}^{m}\mathbb{1}_{U_i\cap U_j}(a_k)=\sum_{k=1}^{m}m_{k,i}m_{k,j}$ avec $m_{i,k}=\mathbb{1}_{U_j}(a_k)$ (1 si $a_k\in U_j$, 0 sinon).

En notant $M\in\mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ la matrice des $m_{i,j}$, et $x_i=|U_i|$, on a alors $H=M^{\intercal}M=\begin{pmatrix} x_1 & a & \cdots & a\\ a & x_2 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & a\\ a & \cdots & a & x_n\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et on commence à voir le lien avec ce qui précède.

Quel rapport avec une inégalité entre n et m ? Nous allons pouvoir calculer le déterminant de H qui va nous donner une information sur son rang et comparer avec le rang de M.

Le déterminant de Hürwitz nous fournit $\det H=\prod_{k=1}^{n}(x_k-a)+a\sum_{k=1}^{n}\prod_{k\neq i}(x_i-a)$. On montre alors qu'il est non nul.

Pour tout i, $a\leqslant x_i$ avec égalité pour au plus un i car les U_i sont distincts deux à deux : en effet, s'il y a égalité pour un i, alors pour tout $j\neq i$, $U_i\cap U_j=U_i$ donc $U_i\subset U_j$.

On en déduit que $\det H>0$ donc H est inversible, puis $\boxed{n=\operatorname{rg}H\leqslant\operatorname{rg}M\leqslant m.}$

13 Calcul par dérivation

1. Soient $a,b,c,d : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des fonctions dérivables et $f : x \mapsto \begin{vmatrix} a(x) & b(x) \\ c(x) & d(x) \end{vmatrix}$. Montrer que f est dérivable et que $f' : x \mapsto \begin{vmatrix} a'(x) & b(x) \\ c'(x) & d(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a(x) & b'(x) \\ c(x) & d'(x) \end{vmatrix}$.

2. Généraliser à un déterminant $n \times n$.

3. Application : calculer, pour $x, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\begin{vmatrix} 1 & \cos x & \sin x \\ 1 & \cos(x+\alpha) & \sin(x+\alpha) \\ 1 & \cos(x+\beta) & \sin(x+\beta) \end{vmatrix}$, puis $\begin{vmatrix} a & 1 & & 0 \\ a^2/2! & a & \ddots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ a^n/n! & \cdots & a^2/2! & a \end{vmatrix}$ pour $a \in \mathbb{R}$.

Solution de 13 : Calcul par dérivation

1. On a $f = ad - bc$ dérivable et $f' = a'd + ad' - b'c - bc' = (a'd - bc') + (ad' - bc') = \boxed{\begin{vmatrix} a' & b \\ c' & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b' \\ c & d' \end{vmatrix}}$.

---

2. Soit pour $1 \leqslant i, j \leqslant n$, $a_{i,j}$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Alors $f : x \mapsto \det(A(x)) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1}(x) \cdots a_{\sigma(n),n}(x)$ est dérivable par opérations, et

$$f' = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \sum_{k=1}^{n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1}(x) \cdots a'_{\sigma(k),k}(x) \cdots a_{\sigma(n),n}(x) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1}(x) \cdots a'_{\sigma(k),k}(x) \cdots a_{\sigma(n),n}(x)$$

qui est $\boxed{\text{la somme des déterminant dans lesquels on a seulement dérivé la } k^{\text{e}} \text{ colonne.}}$

Remarque : on verra plus tard que c'est en réalité une simple conséquence de la multilinéarité du déterminant par rapport à ses colonnes. On pourrait faire de même avec les lignes.

---

3. $f : x \mapsto \begin{vmatrix} 1 & \cos x & \sin x \\ 1 & \cos(x+\alpha) & \sin(x+\alpha) \\ 1 & \cos(x+\beta) & \sin(x+\beta) \end{vmatrix}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$f' : x \mapsto \begin{vmatrix} 0 & \cos x & \sin x \\ 0 & \cos(x+\alpha) & \sin(x+\alpha) \\ 0 & \cos(x+\beta) & \sin(x+\beta) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -\sin x & \sin x \\ 1 & -\sin(x+\alpha) & \sin(x+\alpha) \\ 1 & -\sin(x+\beta) & \sin(x+\beta) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & \cos x & \cos x \\ 1 & \cos(x+\alpha) & \cos(x+\alpha) \\ 1 & \cos(x+\beta) & \cos(x+\beta) \end{vmatrix} = 0$$

Comme $\mathbb{R}$ est un intervalle, f est constante. Donc, en retranchant la première colonne à la seconde et en reconnaissant un déterminant triangulaire par blocs

$$f : x \mapsto f(0) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 1 & \cos\beta & \sin\beta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1+\cos\alpha & \sin\alpha \\ 1 & -1+\cos\beta & \sin\beta \end{vmatrix} = (-1+\cos\alpha)\sin\beta - \sin\alpha\big(-1+\cos\beta\big) = \boxed{\sin(\beta-\alpha) - \big(\sin\beta - \sin\alpha\big).}$$

Puis $g_n : a \mapsto \begin{vmatrix} a & 1 & & 0 \\ a^2/2! & a & \ddots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ a^n/n! & \cdots & a^2/2! & a \end{vmatrix}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on remarque en dérivant une des colonnes qu'on obtient la colonne suivante donc un déterminant nul. Il ne reste donc, pour $n \geqslant 2$, que

$$g_n' : a \mapsto \begin{vmatrix} a & 1 & & & 0 \\ a^2/2! & a & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a & 0 \\ a^n/n! & \cdots & \cdots & a^2/2! & 1 \end{vmatrix} = g_{n-1}(a)$$

en développant par rapport à la dernière colonne ou en reconnaissant un déterminant triangulaire par blocs. On obtient alors (licite) $g_n^{(n-1)} = g_1 : a \mapsto a$. Il reste à primitiver $n-1$ fois et remarquer que toutes les constantes de primitivation sont nulles car pour tout $k \geqslant 1$, $g_k(0) = 0$. Finalement, $\boxed{g_n : a \mapsto \dfrac{a^n}{n!}.}$

14 **Déterminants par blocs** Soient $n,p\in\mathbb{N}^*$, $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $B\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $C\in\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, $D\in\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ et $M\in\mathcal{M}_{n+p}(\mathbb{K})$ la matrice par blocs $M=\begin{pmatrix} A & B\\ C & D\end{pmatrix}$.

1. On suppose dans cette question seulement que $C=0_{\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})}$. Retrouver le résultat du cours donnant le déterminant de M en remarquant que
$$M=\begin{pmatrix} I_n & 0\\ 0 & D\end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B\\ 0 & I_p\end{pmatrix}.$$
2. On suppose désormais que A est inversible.

2.a) Montrer que $M=\begin{pmatrix} A & 0\\ C & D-CA^{-1}B\end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & A^{-1}B\\ 0 & I_p\end{pmatrix}$, puis que
$$\begin{vmatrix} A & B\\ C & D\end{vmatrix}=\det A\times\det\left(D-CA^{-1}B\right).$$

2.b) On suppose de plus que $n=p$ et que A et C commutent. Montrer que
$$\begin{vmatrix} A & B\\ C & D\end{vmatrix}=\det(AD-CB).$$

Donner un résultat analogue lorsque A et B commutent.

Solution de 14 : Déterminants par blocs

1. Par produit par blocs, on a bien $\begin{pmatrix} I_n & 0\\ 0 & D\end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B\\ 0 & I_p\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & B\\ 0 & D\end{pmatrix}=M$ donc $\det M=\begin{vmatrix} I_n & 0\\ 0 & D\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} A & B\\ 0 & I_p\end{vmatrix}=\boxed{\det D\times\det A}$ en développant n fois le premier déterminant par rapport à sa première colonne et p fois le deuxième par rapport à sa dernière ligne.

---

2. On suppose désormais que A est inversible.

2.a) On calcule par blocs $\begin{pmatrix} A & 0\\ C & D-CA^{-1}B\end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & A^{-1}B\\ 0 & I_p\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & B\\ C & D\end{pmatrix}=M$, donc
$$\det M=\begin{vmatrix} A & 0\\ C & D-CA^{-1}B\end{vmatrix}\times\begin{vmatrix} I_n & A^{-1}B\\ 0 & I_p\end{vmatrix}=\boxed{\det A\times\det\left(D-CA^{-1}B\right)}\times 1$$
les deux matrices étant triangulaires par blocs (et même triangulaire pour le deuxième).

2.b) On suppose de plus que $n=p$ et que A et C commutent. On a alors
$$\det M=\det\left(A\times\left(D-CA^{-1}B\right)\right)=\det\left(AD-ACA^{-1}B\right)=\boxed{\det(AD-CB).}$$
Lorsque A et B commutent,
$$\det M=\det\left(\left(D-CA^{-1}B\right)\times A\right)=\boxed{\det(DA-CB).}$$

---

15 Calculer le déterminant de $u : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \\ M & \longmapsto & M^\intercal \end{array} \right.$ directement puis en utilisant $\mathscr{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathscr{A}_n(\mathbb{K}) = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Solution de 15 :

On peut représenter u dans la base canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ dans laquelle on fait figurer d'abord les $E_{i,i}$ puis les $E_{i,j}$ suivi de $E_{j,i}$ pour $i < j$. On obtient la matrice diagonale par blocs

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & (0) & \\ & & 1 & & & \\ & & & A & & \\ & (0) & & & \ddots & \\ & & & & & A \end{pmatrix}$$

avec n fois 1 et $\dfrac{n(n-1)}{2}$ fois la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Donc $\boxed{\det u = \det A^{\frac{n(n-1)}{2}} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}.}$

On peut aussi remarque que u est la symétrie (involutivité) sur $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ (vecteurs invariants) parallèlement à $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ (vecteurs anti-invariants), de dimensions respectives $p = \dfrac{n(n+1)}{2}$ et $q = \dfrac{n(n-1)}{2}$. La matrice de u dans une base adaptée est donc la matrice diagonale

$$\begin{pmatrix} I_p & (0) \\ (0) & -I_q \end{pmatrix}$$

donc $\boxed{\det u = (-1)^q = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}.}$

16 Très classique : des matrices réelles semblables dans $\mathbb{C}$ le sont dans $\mathbb{R}$

Le but est de démontrer le résultat suivant : si deux matrices A et B de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ sont semblables dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, elles le sont aussi dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Pour cela, on considère une matrice $P \in \mathscr{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $B = P^{-1}AP$, condition que l'on écrire $PB = AP$. On note alors P_1 la matrice dont les cœfficients sont les parties réelles de ceux de P, P_2 la matrice dont les cœfficients sont les parties réelles de ceux de P,

1. Démontrer que $P_1B = AP_1$ et $P_2B = AP_2$.
2. Démontrer que l'application $x \mapsto \det(P_1 + xP_2)$ n'est pas constamment nulle sur $\mathbb{R}$ et en déduire le résultat.

Solution de 16 : Très classique : des matrices réelles semblables dans $\mathbb{C}$ le sont dans $\mathbb{R}$

1. On a $PB = (P_1 + \mathrm{i}P_2)B = P_1B + \mathrm{i}P_2B = AP = AP_1 + \mathrm{i}AP_2$.

   Comme P_1B, P_2B, AP_1 et AP_2 sont à cœfficients réels, par unicité de la partie réelle et de la partie imaginaire de tous les cœfficients, $\boxed{P_1B = AP_1 \text{ et } P_2B = AP_2.}$

2. Argument intéressant ! On remarque que l'application $x \mapsto \det(P_1 + xP_2)$ est polynomiale sur $\mathbb{R}$ par définition du déterminant.

   Il s'agit de montrer que le polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ auquel elle est associée n'est pas le polynôme nul.

   A priori, il n'y a pas de raison que P_1 ou P_2 ou une combinaison linéaire $P_1 + xP_2$ soit inversible.

   Mais on était partis de $P = P_1 + \mathrm{i}P_2$ inversible : donc $\det P = \det(P_1 + \mathrm{i}P_2) = Q(\mathrm{i}) \neq 0$ ce qui empêche le polynôme réel Q d'être nul.

   $\boxed{\text{On a donc bien } x \in \mathbb{R} \text{ tel que } Q(x) = \det(P_1 + xP_2) \neq 0}$ donc $P_1 + xP_2$ est une matrice réelle inversible telle que $(P_1 + xP_2)B = A(P_1 + xP_2)$ soit encore $B = (P_1 + xP_2)^{-1}A(P_1 + xP_2)$ et on a bien que $\boxed{A \text{ et } B \text{ sont semblables dans } \mathbb{R}.}$

17 **Grand classique** Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice à coefficients dans $\mathbb{Z}$ soit inversible et ait une inverse à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

Solution de 17 : Grand classique

Analyse Supposons $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ (notation abusive, $\mathbb{Z}$ n'est pas un corps) inversible telle que $M^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ (comme le plus petit corps contenant $\mathbb{Z}$ est $\mathbb{Q}$, on a a priori en général $M^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$).

Comme $M \times M^{-1} = I_n$, on a $\det M \times \det\left(M^{-1}\right) = 1$ et comme ce sont deux entiers, $\det M = \pm 1$.

Vérifions que la condition est suffisante.

Synthèse Supposons $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ telle que $\det M = \pm 1$.

Comme $\det M \neq 0$, M est déjà bien inversible.

Comment montrer que M^{-1} est encore à cœfficients entiers ? On a besoin d'une expression de M^{-1}...

La solution est... la formule de la comatrice !

$M^{-1} = \dfrac{1}{\det M} (\mathrm{Com}\, M)^{\intercal} = \pm (\mathrm{Com}\, M)^{\intercal}$.

Et comme les cofacteurs sont $\pm$ des déterminants à cœfficients entiers, on a bien $M^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$.

Conclusion Une matrice à coefficients dans $\mathbb{Z}$ est inversible et a une inverse à coefficients dans $\mathbb{Z}$ si et seulement si son déterminant vaut ± 1 (ie est inversible dans $\mathbb{Z}$).

18 **Matrices de permutations** Soit $\sigma\in\mathfrak{S}_n$. On appelle matrice de permutation associée à σ la matrice $P_\sigma=\left(\delta_{i,\sigma(j)}\right)_{i,j}\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Quel est l'endomorphisme canoniquement associé à P_σ ?
2. Déterminer, pour $\sigma,\rho\in\mathfrak{S}_n$, $P_\sigma\times P_\rho$.
3. Montrer que $\left(\{P_\sigma,\ \sigma\in\mathfrak{S}_n\},\times\right)$ est un groupe isomorphe à $(\mathfrak{S}_n,\circ)$.
4. Montrer que $P_\sigma^\intercal=P_{\sigma^{-1}}=P_\sigma^{-1}$.
5. Quel est le résultat d'une multiplication à gauche ou à droite par une matrice de permutation ?
6. Calculer le déterminant de P_σ.

Solution de 18 : Matrices de permutations

1. On a pour tout $j\in[\![1,n]\!]$, la j^{e} colonne de P_σ est le $\sigma(j)^{\text{e}}$ vecteur de la base canonique.
Donc si u_σ est l'application linéaire canoniquement associée à P_σ, $(e_1,\dots,e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, alors pour tout $(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$,

$$u_\sigma(x_1,\dots,x_n)=\sum_{j=1}^n x_j\,u(e_j)=\sum_{j=1}^n x_j\,e_{\sigma(j)}\underset{k=\sigma(j)}{=}\sum_{k=1}^n x_{\sigma^{-1}(k)}e_k=\left(x_{\sigma^{-1}(1)},\dots,x_{\sigma^{-1}(n)}\right)$$

donc $\boxed{u:(x_1,\dots,x_n)\mapsto\left(x_{\sigma^{-1}(1)},\dots,x_{\sigma^{-1}(n)}\right).}$

2. Soit $\sigma,\rho\in\mathfrak{S}_n$, $j\in[\![1,n]\!]$. Alors

$$u_\sigma\circ u_\rho(e_j)=e_{\sigma\circ\rho(j)}=u_{\sigma\circ\rho}(e_j)$$

donc

$$\boxed{P_\sigma\times P_\rho=P_{\sigma\circ\rho}.}$$

3. Soit $f:\left|\begin{array}{ccc}\mathfrak{S}_n&\longrightarrow&\{P_\sigma,\ \sigma\in\mathfrak{S}_n\}\\ \sigma&\longmapsto&P_\sigma\end{array}\right.$.
Alors pour tout $\sigma,\rho\in\mathfrak{S}_n$, $f(\sigma\circ\rho)=f(\sigma)\times f(\rho)$, donc $\{P_\sigma,\ \sigma\in\mathfrak{S}_n\}=f(\mathfrak{S}_n)$ est un groupe multiplicatif (voir exercice sur le transport de structure. On démontre aussi facilement que c'est un sous-groupe de $\mathscr{GL}_n(\mathbb{R})$ en utilisant la question précédente).
f est alors un morphisme de groupe et comme il est manifestement surjectif, il suffit de montrer son injectivité. On l'obtient en remarquant que

$$\sigma\in\operatorname{Ker}f\iff P_\sigma=I_n\iff\forall\,j\in[\![1,n]\!],\quad\sigma(j)=j\iff\sigma=\mathrm{id}.$$

On a donc bien que $\boxed{\left(\{P_\sigma,\ \sigma\in\mathfrak{S}_n\},\times\right)\text{ est un groupe isomorphe à }(\mathfrak{S}_n,\circ).}$

4. On a $P_{\sigma^{-1}}=f\left(\sigma^{-1}\right)=f(\sigma)^{-1}=P_\sigma^{-1}$ (se voit aussi avec $P_\sigma\times P_{\sigma^{-1}}=P_{\mathrm{id}}=I_n$) donc $\boxed{P_{\sigma^{-1}}=P_\sigma^{-1}.}$
Puis, pour $i,j\in[\![1,n]\!]$,

$$\left[P_\sigma^\intercal\right]_{i,j}=[P_\sigma]_{j,i}=\delta_{j,\sigma(i)}=\delta_{i,\sigma^{-1}(j)}=[P_{\sigma^{-1}}]_{j,i}$$

donc $\boxed{P_\sigma^\intercal=P_\sigma^{-1}.}$

5. Soit $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ d'endomorphisme canoniquement associé u, $(e_1,\dots,e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
Alors pour tout j entre 1 et n,

$$u\circ u_\sigma(e_j)=u\left(e_{\sigma(j)}\right)$$

donc la j^{e} colonne de AP_σ est la $\sigma(j)^{\text{e}}$ colonne de A :

$$\boxed{\text{Multiplier à droite par } P_\sigma \text{ revient à permuter les colonnes de la matrice avec } \sigma.}$$

Puis $(P_\sigma A)^\intercal=A^\intercal P_\sigma^\intercal=A^\intercal P_{\sigma^{-1}}$: les colonnes de $(P_\sigma A)^\intercal$ sont les colonnes de $A^\intercal$ permutées avec σ^{-1} donc

$$\boxed{\text{Multiplier à gauche par } P_\sigma \text{ revient à permuter les lignes de la matrice avec } \sigma^{-1}.}$$

6.

$$\det P_\sigma=\sum_{\rho\in\mathfrak{S}_n}\varepsilon(\rho)\delta_{\rho(i),\sigma(j)}\cdots\delta_{\rho(i),\sigma(j)}$$

Dans cette somme, le seul terme non nul est celui pour lequel $\rho=\sigma$. Donc $\boxed{\det P_\sigma=\varepsilon(\sigma).}$
On aurait aussi pu permuter les lignes (resp. colonnes) du déterminant avec σ (resp. σ^{-1}) pour se ramener à I_n et obtenir le même résultat.