1. Espaces vectoriels

1 Montrer que l'ensemble des suites réelles p-périodiques où $p \in \mathbb{N}^*$ est fixé est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

2 Étudier l'indépendance linéaire de $(x \mapsto x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ puis de $(x \mapsto |x-a|)_{a\in\mathbb{R}}$, $(x \mapsto \mathrm{e}^{nx})_{n\in\mathbb{N}}$, $(x \mapsto \cos(ax))_{a\in\mathbb{R}}$.

Solution de 2 :

Pour la première et la troisième, passer par des polynômes, pour la deuxième, utiliser une propriété de dérivabilité.

Pour la quatrième, dériver deux fois et faire une opération avec la relation de départ pour se débarrasser d'un terme. On conclut par récurrence.

3 $E = \mathscr{C}([-1,1],\mathbb{R})$, $F = \{f \in E$ constante$\}$, $G = \{f \in E$ nulle sur $[-1,0]\}$ et $H = \{f \in E$ nulle sur $[0,1]\}$. Montrer que F, G, H sont supplémentaires dans E.

Solution de 3 :
$F = \mathrm{Vect}\, 1$, G et H sev par caractérisation.

Puis anaylse-synthèse : si, avec des notations évidentes, $\phi = f + g + h$, alors en intégrant, $f : x \mapsto \phi(0)$, $g(x) = \phi(x) - \phi(0)$ si $x > 0$ et 0 sinon, $h(x) = \phi(x) - \phi(0)$ si $x < 0$ et 0 sinon. La synthèse ne pose pas de problème.

2. Dimension finie

4 **CCINP 55 : Suites récurrentes d'ordre 2** Soit a un nombre complexe.

On note E l'ensemble des suites à valeurs complexes telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 2a\,u_{n+1} + 4(\mathrm{i}a-1)u_n \text{ avec } (u_0, u_1) \in \mathbb{C}^2.$$

1. (a) Prouver que E est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites à valeurs complexes.
   (b) Déterminer, en le justifiant, la dimension de E.
2. Dans cette question, on considère la suite de E définie par : $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$.
   Exprimer, pour tout entier naturel n, le nombre complexe u_n en fonction de n.
   Indication : discuter suivant les valeurs de a.

5 Montrer que $E = \left\{a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} \mid a, b, c \in \mathbb{Q}\right\}$ est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel. Quelle est sa dimension ?

Solution de 5 :
$E = \mathrm{Vect}\left(1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\right)$ famille Q-libre (...) donc $\dim E = 3$.

6 Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, F, G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $\dim F + \dim G > n$. Montrer que $F \cap G$ possède au moins un vecteur non nul.

Solution de 6 :

Utiliser la formule de Grassmann.

7 Soit $\mathbb{L}$ un sous-corps de $\mathbb{K}$ tel que le $\mathbb{L}$-espace vectoriel $\mathbb{K}$ soit de dimension finie $\dim_{\mathbb{L}} \mathbb{K} = p$, et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $\dim_{\mathbb{K}} E = n$.

Montrer que E est un $\mathbb{L}$-espace vectoriel de dimension finie $\dim_{\mathbb{L}} E = pn = \dim_{\mathbb{L}} \mathbb{K} \dim_{\mathbb{K}} E$.

Solution de 7 :

Soit $\mathscr{C} = (e_1, \dots, e_n)$ une base du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, et $\mathscr{D} = (k_1, \dots, k_p)$ une base du $\mathbb{L}$-espace vectoriel $\mathbb{K}$.

Soit enfin $\mathscr{B} = (k_i e_j)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ famille de np vecteurs de E.

Alors tout vecteur x de E est une combinaison linéaire des e_j dont les coefficients, dans $\mathbb{K}$, sont eux-même combinaisons linéaire des k_i à coefficients dans $\mathbb{L}$: $x = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_{i,j} k_i \right) e_j = \sum_{i,j} \lambda_{i,j} k_i e_j$. Ainsi, les vecteurs de E sont tous combinaison linéaire des $k_i e_j$ et $E = \mathrm{Vect}_{\mathbb{L}}(k_i e_j)_{i,j}$ est un $\mathbb{L}$-espace vectoriel.

De plus, si $\sum_{i,j} \lambda_{i,j} k_i e_j = 0_E$ où les $\lambda_{i,j}$ sont des scalaires de $\mathbb{L}$, alors $\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_{i,j} k_i \right) e_j = 0_E$. Comme $\mathscr{C}$ est une base du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, pour tout j entre 1 et n, $\sum_{i=1}^{p} \lambda_{i,j} k_i = 0_{\mathbb{K}}$ et comme $\mathscr{D}$ est une base de $\mathbb{K}$, pour tout i entre 1 et p, $\lambda_{i,j} = 0$. Ainsi, $\mathscr{B}$ est libre.

Finalement, $\boxed{\mathscr{B} \text{ est une base du } \mathbb{L}\text{-espace vectoriel } E \text{ qui est de dimension } np.}$

3. Applications linéaires

8 **CCINP 62 : Endomorphisme connu par un polynôme annulateur** Sauf 2.b

9 **CCINP 64 : CNS pour que $\mathrm{Ker}\, f$ et $\mathrm{Im}\, f$ soient supplémentaires**

10 **CCINP 93 : utilisation d'une équation dans $\mathscr{L}(E)$** Seulement 1.

11 **CCINP 60 : étude d'un endomorphisme matriciel**

12 Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $u^2 - 4u + 3\,\mathrm{id}_E = 0_{\mathscr{L}(E)}$. Montrer que u est automorphisme, déterminer u^{-1} puis montrer que $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(u - 3\,\mathrm{id}_E) = E$. Quelle transformation u représente-t-elle ?

13 Soient E, F, G des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $u \in \mathscr{L}(E, F)$ et $v \in \mathscr{L}(F, G)$. Montrer

1. $\mathrm{Ker}\, u \subset \mathrm{Ker}(v \circ u) = u^{-1}(\mathrm{Ker}\, v)$ et $v(\mathrm{Im}\, u) = \mathrm{Im}(v \circ u) \subset \mathrm{Im}\, v$.
2. $\mathrm{Ker}(v \circ u) = \mathrm{Ker}\, u \iff \mathrm{Ker}\, v \cap \mathrm{Im}\, u = \left\{ \vec{0}_F \right\}$.
3. $\mathrm{Im}(v \circ u) = \mathrm{Im}\, v \iff \mathrm{Ker}\, v + \mathrm{Im}\, u = F$.

14 Soient $u, v \in \mathscr{L}(E)$ tels que $u \circ v = v \circ u$. Montrer que le noyau et l'image de l'un sont stables par l'autre.

15 Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u \in \mathscr{L}(E)$. On suppose que pour tout $x \in E$, la famille $(x, u(x))$ est liée. Démontrer que u est une homothétie.

Application : déterminer, en dimension finie, le centre de $\mathscr{GL}(E)$.

Si x non nul, on pourra s'intéresser à $D = \mathrm{Vect}\, x$ et introduire une symétrie.

Retrouver le résultats en raisonnant matriciellement.

16 Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, p, q deux projecteurs. Démontrer que $p+q$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0$.

17 Soient p, q deux projecteurs sur un espace vectoriel E tel que $p \circ q = 0$. Montrer que $r = p + q - q \circ p$ est un projecteur sur $\mathrm{Im}\, p + \mathrm{Im}\, q$ parallèlement à $\mathrm{Ker}\, p \cap \mathrm{Ker}\, q$.

18 **Images et noyaux itérés**

Soit E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que $F_n = \mathrm{Im}\, u^n$ et $G_n = \mathrm{Ker}\, u^n$ forment des suites de sous-espaces respectivement décroissante et croissante (pour l'inclusion). Montrer qu'elles sont stationnaires à partir d'un même rang p si E est de dimension finie, et que F_p et G_p sont supplémentaires.

19 Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, $u, v \in \mathscr{L}(E, F)$. Montrer que

$$\left|\mathrm{rg}\, u - \mathrm{rg}\, v\right| \leqslant \mathrm{rg}(u+v) \leqslant \mathrm{rg}\, u + \mathrm{rg}\, v.$$

20 Soient E, F, G des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, $u \in \mathscr{L}(E, F)$ et $v \in \mathscr{L}(F, G)$. Montrer que

$$\mathrm{rg}\, v \circ u \geqslant \mathrm{rg}\, u + \mathrm{rg}\, v - \dim F.$$

21 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\mathrm{rg}\, u = 1$. Montrer qu'il existe un unique $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u^2 = \lambda u$.

22 Soient E un espace vectoriel de dimension finie de $u \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que sont équivalentes

1. $\mathrm{Ker}\, u \oplus \mathrm{Im}\, u = E$
2. $\mathrm{Ker}\, u = \mathrm{Ker}\, u^2$
3. $\mathrm{Im}\, u = \mathrm{Im}\, u^2$

23 Soient E $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $u, v \in \mathscr{L}(E)$ tels que

$$E = \mathrm{Im}\, u + \mathrm{Im}\, v = \mathrm{Ker}\, u + \mathrm{Ker}\, v.$$

Montrer que ces sommes sont directes.

24 Montrer qu'une forme linéaire est soit nulle soit surjective.

25 Soit φ une forme linéaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Montrer qu'il existe une unique matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\varphi : M \mapsto \mathrm{tr}(AM)$.
2. On suppose que pour tout $(M, N) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\varphi(MN) = \varphi(NM)$.
   Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\varphi = \lambda\, \mathrm{tr}$.

4. Calcul matriciel

26 Calculer les puissances entières (préciser si les expressions sont valables dans $\mathbb{Z}$) de la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ par le binôme ou en déterminant un polynôme annulateur de A. Donner l'expression, plus généralement, de $P(A)$ pour tout polynôme P.

Retrouver le résultat en considérant $Q^{-1}MQ$ avec $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

27 Montrer que, si $a \in \mathbb{K}$, la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -a & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & -a \\ (0) & & & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et calculer son inverse.

28 Soit $A = (1 - \delta_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. En calculant A^2, montrer que A est inversible et calculer son inverse.

29 Déterminer le centre de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, c'est-à-dire les matrices $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telles que

$$\forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), \quad AM = MA.$$

30 Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des éléments de $\mathbb{K}$, deux à deux distincts, et $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

Déterminer les matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ commutant avec D.

31 Que dire de $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $\forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), \ \operatorname{tr}(AM) = \operatorname{tr}(BM)$?

32 Déterminer les matrices $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB - BA = I_n$.

33 Montrer que pour toute matrice carrée A, il existe un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ non constant tel que $P(A) = 0$.
En déduire que si A est inversible, A^{-1} est un polynôme en A.
Que peut-on dire de l'inverse d'une matrice inversible dans une sous-algèbre $\mathscr{B}$ de $(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), +, \times, \cdot)$?

34 **Matrices à diagonale strictement dominante**

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que pour tout i entre 1 et n, $|a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$.

En calculant $\operatorname{Ker} A$, montrer que A est inversible.

35 Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 3 & -4 \\ 3 & 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}$. Déterminer l'image et le noyau de A.

36 Déterminer le rang de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Expliciter deux matrices carrées inversibles U et V telles que

$UAV = J_{3,4,r}$ où $r = \operatorname{rg} A$.

37 Quel est le rang de $A = (\sin(i+j))_{1\leqslant i,j\leqslant n}$?

38 Soit $H \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ de rang 1. Montrer qu'il existe deux matrices colonnes $U, V \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ telles que $H = UV^\intercal$ et qu'alors $\operatorname{tr} H = V^\intercal U$.

39 On considère les quatre matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice A est-elle semblable à B ? à C ? à D ?

40 Soit $A = \begin{pmatrix} 18 & 14 & 34 \\ -5 & -3 & -10 \\ -6 & -5 & -11 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Montrer que A et B sont semblables, puis expliciter $P \in \mathscr{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que $B = P^{-1}AP$.

5. Matrices d'applications linéaires

41 CCINP 71 : étude d'une projection

42 Reconnaître et étudier les endomorphismes canoniquement associés aux matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -6 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 7 & -2 & -2 \\ 16 & -5 & -4 \\ 8 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

43 Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^\star$ et $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $u^n = 0$ et $u^{n-1} \neq 0$.

Montrer qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de E pour laquelle : $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$.

44 Les matrices suivantes sont-elles semblables ?

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -5 & -2 \\ -1 & -6 & 5 & -2 \\ -1 & -10 & 8 & -3 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & 21 \\ 0 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

45 CCINP 59 : Morphisme de polynômes
Sauf 3.

46 Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice non nulle telle que $A^2 = 0$. Montrer que A est semblable à $B = \begin{pmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

47 En utilisant les matrices J_r, montrer que si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$, $\operatorname{rg}\begin{pmatrix} A & (0) \\ (0) & B \end{pmatrix} = \operatorname{rg} A + \operatorname{rg} B$. Retrouver ce résultat en utilisant l'interprétation géométrique des matrices par blocs puis en utilisant la réduction en matrices échelonnées.

48 Soit $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Déterminer le rang de $M = \begin{pmatrix} A & A \\ A & B \end{pmatrix}$.
2. Calculer l'inverse de M lorsque c'est possible.

Solution de 48 :

1. Par opérations élémentaires, M est équivalente à $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B-A \end{pmatrix}$: $\operatorname{rg} M = \operatorname{rg} A + \operatorname{rg}(B-A)$.
2. Résoudre $M\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}$ avec A et $B-A$ inversibles.