MPI

CONCOURS COMMUN INP

RAPPORT DE L'ÉPREUVE ÉCRITE DE MATHÉMATIQUES 2

1/ THÈME DE L'ÉPREUVE

Ce sujet était constitué de deux exercices et d'un problème, tous indépendants.

Le premier exercice portait sur la réduction des endomorphismes et les suites. Plus précisément, il s'agissait de diagonaliser une matrice et d'en déduire des résultats de convergence sur des suites définies par un système de relations de récurrences.

Le second exercice aborde l'étude d'une série de fonctions, mettant en jeu les théorèmes classiques du programme autour de cette notion. Il se conclut grâce à un calcul d'intégrale généralisée.

Le problème proposait l'exploration de différents critères de définie-positivité pour les matrices symétriques réelles. On y démontrait des théorèmes au programme (caractérisation spectrale, critère sur la trace et le déterminant en dimension 2), puis il s'agissait de démontrer le critère de Sylvester, valable en dimension quelconque. Tout au long du sujet, des applications de ces différents critères sont proposées.

2/ REMARQUES GÉNÉRALES

Le sujet était très abordable et sa longueur était raisonnable, les thèmes abordés étaient classiques et couvraient une bonne partie du programme d'algèbre linéaire, ainsi que des éléments d'analyse tels que les séries numériques et séries de fonctions, ou encore un calcul d'intégrale par intégration par parties. On y trouvait un certain nombre de questions de cours, ce qui a permis de valoriser le travail des candidats effectué tout au long de leur année. Les questions étaient de difficultés variées, le sujet offre donc un classement adéquat des candidats, avec une moyenne de 10,81 et un écart-type de 4,38.

Trop de copies sont très mal écrites et raturées, parfois au point d'être illisibles. On rappelle que la tenue des copies et le fait de faire apparaître clairement les résultats sont pris en compte dans le barème de l'épreuve.

Mis à part ces problèmes et hormis quelques questions, le sujet a été globalement bien compris par les candidats. Les étudiants ayant bien travaillé et connaissant bien leur cours étaient capables de dépasser la moyenne.

3/ REMARQUES DÉTAILLÉES PAR QUESTION

EXERCICE 1

Q1. Majoritairement bien traitée, mais on note un manque d'efficacité dans certains calculs. Aux étudiants qui se trompent dans les calculs de spectre, on rappelle que la trace est un bon moyen de vérification.

Q2. Peu de candidats traitent cette question entièrement. Du temps est parfois perdu à calculer l'inverse de la matrice de passage.

EXERCICE 2

Q3. Les correcteurs ont constaté quelques lacunes sur les séries numériques. Parfois, le résultat est donné sans aucune justification. Dans d'autres cas, on oublie de démontrer la non convergence en dehors du domaine proposé.

Q4. Certains candidats pensent avoir montré la convergence uniforme sur tout l'ensemble de définition.

Q5. Même remarque qu'à la question précédente. De plus, les candidats oublient parfois le premier terme de la série, ce qui fausse leur résultat final.

Q6. La réponse étant donnée dans la question, il convient ici de fournir une preuve précise du résultat et d'éviter les paraphrases inutiles.

Q7. Peu de candidats ont trouvé un résultat complet et correct. Il s'agissait ici de ne pas se contenter d'un équivalent sous la forme d'une intégrale, mais bien de calculer celle-ci.

PROBLÈME

Q8. Beaucoup de candidats se sont contentés de l'inégalité large, alors qu'il est question de définie-positivité. En particulier, $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \neq (\mathbf{0},\mathbf{0})$ n'assure pas $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})^2 > \mathbf{0}$. Quelques candidats ne réalisent pas que la quantité à étudier est un scalaire.

Q9. Le théorème est connu majoritairement, mais pas nécessairement sa démonstration. Certains candidats oublient complètement de démontrer la réciproque.

Q10. Une mauvaise connaissance du théorème des valeurs intermédiaires et du théorème de la bijection a été constatée. Le tableau de variation est parfois utilisé comme preuve de l'existence des trois racines réelles, il s'agissait d'être plus précis sur les théorèmes appliqués. On rappelle également qu'un polynôme à coefficients réels peut admettre des racines non réelles.

Q11. Question plutôt bien traitée. Il convient de faire intervenir les multiplicités des valeurs propres lorsque l'on exprime $\boldsymbol{tr}(\boldsymbol{M})$ comme une somme sur $\boldsymbol{Sp}(\boldsymbol{M})$. Quelques erreurs de manipulation de la trace et du déterminant ont été signalées : en particulier, il convient d'appliquer le déterminant à des matrices carrées uniquement.

Q12. Pour donner le signe des valeurs propres de $\boldsymbol{M}$, il n'était pas nécessaire de les exprimer explicitement en fonction de $\boldsymbol{tr}(\boldsymbol{M})$ et $\mathbf{det}(\boldsymbol{M})$.

Q13. Une moitié des candidats traite correctement cette question. D'autres peinent à trouver un contre-exemple valide, ou bien pensent que le critère reste vrai.

Q14. Des erreurs de calcul ont été rencontrées pendant la recherche du point critique, ou bien lors du calcul de la hessienne. L'utilisation de la matrice hessienne semble cependant bien maîtrisée par les candidats.

Q15. Question majoritairement bien traitée par les candidats.

Q16. Question majoritairement bien traitée par les candidats, malgré quelques maladresses dans l'utilisation de la question précédente.

Q17. Question peu réussie entièrement. En particulier, l'existence du vecteur colonne $\boldsymbol{V}$ a été peu démontrée et la stricte positivité de $\boldsymbol{\beta}$ a posé des problèmes.

Q18. Une erreur courante a été de penser que le spectre d'un mineur principal d'une matrice est inclus dans le spectre de cette matrice. Le raisonnement par récurrence proposé dans cette question a mis en lumière des problèmes de rigueur chez certains candidats.

Q19. Les correcteurs ont malheureusement rencontré beaucoup d'erreurs de calculs, notamment dans la résolution de l'inéquation $\boldsymbol{x}^2 < \frac{1}{2}$.

Q20. Question relativement bien traitée. On constate à nouveau des erreurs de calcul.

Q21. Question peu abordée, souvent traitée directement sans utiliser le critère de Sylvester. Cela était tout à fait possible, mais certains candidats se contentent d'une inégalité large.

Q22. Question abordée uniquement par une petite partie des candidats, moins d'un candidat sur dix la réussit entièrement. Le calcul du déterminant par récurrence est souvent mal mené.

4/ CONCLUSION

On rappelle à tous les candidats que la rigueur et la clarté des raisonnements et des copies sont des attendus essentiels des concours. Les correcteurs valorisent ainsi, entre autres :

- le soin apporté aux copies ;
- la rigueur des calculs et des raisonnements présentés ;
- la connaissance précise des théorèmes du programme, ainsi que les preuves des points importants.

Les étudiants sont invités à fournir des efforts en ce sens, puisqu'un candidat de niveau moyen qui a travaillé doit pouvoir obtenir au moins la moyenne.

Voici quelques conseils pour les futurs candidats :

1. Éviter d'essayer « d'escroquer » les correcteurs en « trafiquant les calculs » ; ceci indispose fortement le correcteur.

2. Chaque hypothèse d'une question doit être utilisée et le candidat doit écrire sur sa copie à quel moment cette hypothèse est utile.

3. Certaines réponses peuvent tenir en une ou deux lignes.

4. Citer TOUS les théorèmes utilisés et rappeler sur le moment toutes les hypothèses utiles, même si elles figurent quelques lignes plus haut ou à la question précédente.

5. Numéroter les copies et les rendre dans le bon ordre.

6. Commencer l'épreuve par une lecture « diagonale » du sujet ; vous pourrez ainsi mieux vous imprégner du texte.

7. C'est perdre son temps que de recopier l'énoncé avant chaque réponse.

8. Prendre le temps de bien comprendre la question avant de répondre.

9. Soigner la présentation.

10. Éviter, dans une démonstration, d'utiliser le résultat qui doit être prouvé.