Devoir en Temps Limité n° 3

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Il n'est pas possible de quitter la salle avant la fin des 4 heures.

Les calculatrices sont interdites

Le problème d'algèbre linéaire est à traiter par tous.

Puis il faut choisir de traiter le problème d'analyse CCINP **ou** (exclusif) celui Mines-Ponts.

Algèbre linéaire [Commun] – 1 h 30
Matrices semblables à leur inverse

Dans tout le problème, E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de **dimension** 3.

Partie A

1. On notera $A \sim B$ pour dire que la matrice A est semblable à la matrice B.

   Démontrer que la relation $\sim$ est une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

   On pourra désormais dire que les matrices A et B **sont** semblables.
2. Soit u un endomorphisme de E et soit i et j deux entiers naturels.
   On considère l'application w de $\operatorname{Ker} u^{i+j}$ vers E définie par : $w(x) = u^j(x)$.
   (a) Montrer que $\operatorname{Im} w \subset \operatorname{Ker} u^i$.
   (b) En déduire que $\dim\left(\operatorname{Ker} u^{i+j}\right) \leqslant \dim\left(\operatorname{Ker} u^i\right) + \dim\left(\operatorname{Ker} u^j\right)$.
3. Soit u un endomorphisme de E vérifiant : $u^3 = 0$ et $\operatorname{rg} u = 2$.
   (a) Montrer que $\dim\left(\operatorname{Ker} u^2\right) = 2$. (On pourra utiliser deux fois la question **2 (b)**.).
   (b) Montrer que l'on peut trouver un vecteur a non nul de E tel que $u^2(a) \neq 0$, et en déduire que la famille $(u^2(a), u(a), a)$ est une base de E.
   (c) Écrire alors la matrice U de u et la matrice V de $u^2 - u$ dans cette base.
4. Soit u un endomorphisme de E vérifiant : $u^2 = 0$ et $\operatorname{rg} u = 1$.
   (a) Montrer que l'on peut trouver un vecteur b non nul de E tel que $u(b) \neq 0$.
   (b) Justifier l'existence d'un vecteur c de $\operatorname{Ker} u$ tel que la famille $(u(b), c)$ soit libre, puis montrer que la famille $(b, u(b), c)$ est une base de E.
   (c) Ecrire alors la matrice U' de u et la matrice V' de $u^2 - u$ dans cette base.

Partie B

Soit désormais une matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ semblable à une matrice du type $T = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On se propose de montrer que la matrice A est semblable à son inverse A^{-1}.

On pose alors $N = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, et soit une matrice P de $GL_3(\mathbb{R})$ telle que

$$P^{-1}AP = T = I_3 + N.$$

1. Expliquer pourquoi la matrice A est bien inversible.
2. Calculer N^3 et montrer que $P^{-1}A^{-1}P = I_3 - N + N^2$.
3. On suppose dans cette question que $N = 0$, montrer alors que les matrices A et A^{-1} sont semblables.
4. On suppose dans cette question que $\operatorname{rg} N = 2$. On pose $M = N^2 - N$.
   (a) Montrer que la matrice N est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et en déduire, en utilisant la question **A 3.**, une matrice semblable à la matrice M.
   (b) Calculer M^3 et déterminer $\operatorname{rg} M$.
   (c) Montrer que les matrices M et N sont semblables.
   (d) Montrer alors que les matrices A et A^{-1} sont semblables.

On démontre de même que si $\operatorname{rg} N = 1$, les matrices A et A^{-1} sont semblables.

Analyse [CCINP] – 2 h 30
Développement ternaire

Le problème est composé de trois parties indépendantes.

Lorsqu'un raisonnement utilise le résultat d'une question précédente, il est demandé au candidat d'indiquer précisément le numéro de la question utilisée.

L'objectif de la **partie I** est de montrer l'existence d'un développement ternaire propre pour certains nombres réels. La **partie II** propose l'étude d'une série de fonctions où les coefficients du développement ternaire sont remplacés par une fonction continue. La **partie III** définit et présente quelques propriétés de la fonction de Cantor-Lebesgue

On note T l'ensemble des suites réelles $t=(t_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ à valeurs dans $\{0,1,2\}$.

On désigne par ℓ^∞ l'ensemble des suites réelles $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ bornées et on pose $\|u\|=\sup\limits_{n\in\mathbb{N}^*}|u_n|$.

On note $\lfloor y\rfloor$ la partie entière d'un réel y.

Partie I – Développement ternaire

Étude de l'application σ

1. Démontrer que ℓ^∞ est un espace vectoriel réel.
2. Pour $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}\in\ell^\infty$, montrer que la série de terme général $\dfrac{u_n}{3^n}$ est convergente. On note
$$\sigma(u)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{u_n}{3^n}.$$
3. Démontrer que l'application σ est une forme linéaire sur ℓ^∞.
4. Démontrer que si $t=(t_n)_{n\in\mathbb{N}^*}\in T$, alors le réel $\sigma(t)$ est dans l'intervalle $[0,1]$.
5. On note $\tau=(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\tau'=(\tau'_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ les éléments de T définis par :
$$\tau_1=1 \text{ et } \forall n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\},\ \tau_n=0 \qquad ; \qquad \tau'_1=0 \text{ et } \forall n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\},\ \tau'_n=2.$$
Calculer $\sigma(\tau)$ et $\sigma(\tau')$. L'application σ est-elle injective sur T ?

Développement ternaire propre

On fixe $x\in[0,1[$. On définit une suite $t(x)=(t_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ par :
$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ t_n(x)=\lfloor 3^n x\rfloor-3\lfloor 3^{n-1}x\rfloor.$$

6. Démontrer que $t(x)\in T$.
7. On définit deux suites réelles $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par :
$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ x_n=\frac{\lfloor 3^n x\rfloor}{3^n} \text{ et } y_n=x_n+\frac{1}{3^n}.$$
Démontrer que les suites (x_n) et (y_n) sont adjacentes de limite x. En déduire que :
$$x=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{t_n(x)}{3^n}.$$
Que peut-on en conclure concernant l'application $\left\{\begin{array}{ccc} T & \longrightarrow & [0,1] \\ u & \longmapsto & \sigma(u)\end{array}\right.$?

La suite $t(x)=(t_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est appelée développement ternaire propre de x.

Partie II – Étude d'une fonction définie par une série

Dans cette partie, on définit une fonction φ à l'aide d'un développement en série analogue au développement ternaire propre d'un réel, mais où la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est remplacée par une fonction numérique à valeurs dans l'intervalle $[0,2]$.

Pour tout réel x on pose $\varphi(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1+\sin(nx)}{3^n}$.

Étude de l'application φ

8. Démontrer que φ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
9. Pour tout x réel, justifier l'écriture $\varphi(x)=\dfrac{1}{2}+\mathrm{Im}\left(\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{inx}}{3^n}\right)$.
En déduire une expression simple de $\varphi(x)$ en fonction de $\sin(x)$ et $\cos(x)$.
10. On note, pour $n\geqslant 1$, $f_n : x\mapsto \dfrac{1+\sin(nx)}{3^n}$, qui est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que $\sum f'_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.
On admet qu'alors φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $\varphi'=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}f'_n$.
Pour $x\in\mathbb{R}$, en déduire une expression simple de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n\cos(nx)}{3^n}$ en fonction de $\cos(x)$.

Partie III – Fonction de Cantor-Lebesgue

Dans cette partie, on va définir et étudier la fonction de Cantor-Lebesgue.

Étude d'une suite de fonctions

On note f_0 la fonction définie sur $[0,1]$ par $f_0(x)=x$. Pour tout entier $n\in\mathbb{N}$, on pose :
$$\forall x\in[0,1],\ f_{n+1}(x)=\begin{cases}\dfrac{f_n(3x)}{2} & \text{si } x\in\left[0,\dfrac{1}{3}\right]\\[2mm] \dfrac{1}{2} & \text{si } x\in\left]\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3}\right[\\[2mm] \dfrac{1}{2}+\dfrac{f_n(3x-2)}{2} & \text{si } x\in\left[\dfrac{2}{3},1\right]\end{cases}.$$

11. Représenter l'allure graphique des fonctions f_0, f_1 et f_2 sur trois schémas différents (pour f_2 on envisagera sept sous-intervalles de $[0,1]$).
Pour tout $n\in\mathbb{N}$, démontrer que f_n est à valeurs dans $[0,1]$.
12. Pour tout entier $n\in\mathbb{N}$, démontrer que $\forall x\in[0,1],\ |f_{n+1}(x)-f_n(x)|\leqslant\dfrac{1}{3\times 2^{n+1}}$.
13. En déduire que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0,1]$.

La limite de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est notée f.
On l'appelle fonction de Cantor-Lebesgue.

14. Démontrer que la fonction f est à valeurs dans $[0,1]$ et qu'elle est croissante et continue sur $[0,1]$. Démontrer aussi qu'elle est surjective de $[0,1]$ vers $[0,1]$.

La fonction f est aussi nommée « escalier du diable ». Les développements ternaires étudiés en début de problème permettent d'obtenir une expression analytique de $f(x)$.

Analyse $\ast$ [CCMP] – 2 h 30
Suites équiréparties et critère d'équirépartition

Soit I le segment $[0,1]$; une fonction réelle f, définie sur l'intervalle I, est continue par morceaux s'il existe une subdivision finie de I : $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = 1$, telle que la restriction de la fonction f à chacun des intervalles ouverts $]x_{i-1}, x_i[$, $1 \leqslant i \leqslant n$, est continue et se prolonge en une fonction continue sur l'intervalle fermé $[x_{i-1}, x_i]$. Il est admis qu'une fonction f continue par morceaux sur I est bornée. La borne supérieure des valeurs prises par la fonction $|f|$ est désignée par $\|f\|$, ($\|f\| = \sup\limits_{0\leqslant x\leqslant 1} |f(x)|$).

Soit E l'espace vectoriel des fonctions réelles définies et continues par morceaux sur I.

Les suites considérées dans ce problème sont des suites de nombres réels indexés par des entiers strictement positifs : $A = (a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Suite équi-répartie dans I : une suite $A = (a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de réels a_n, $n \in \mathbb{N}^*$, appartenant à l'intervalle I, $(0 \leqslant a_n \leqslant 1)$ est équi-répartie dans I, si et seulement si, pour toute fonction f de E, la suite des moyennes arithmétiques des valeurs prises par la fonction f aux N points a_n, $1 \leqslant n \leqslant N$, est convergente et de limite l'intégrale de la fonction f étendue à l'intervalle I :

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(a_n) = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Suite équi-répartie modulo I : étant donnée une suite de réels $(r_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, la suite des réels définis par la relation : pour tout entier n strictement positif $a_n = r_n - [r_n]$, où $[r_n]$ est la partie entière du réel r_n ($[r_n]$ est un entier tel que $[r_n] \leqslant r_n < [r_n]+1$). La suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est équi-répartie modulo I, si et seulement si la suite des réels a_n, $n \in \mathbb{N}^*$, est équi-répartie dans I.

1. **Un critère d'équi-répartition**

   Soit $A = (a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels $a_n, n \in \mathbb{N}^*$, appartenant à l'intervalle I. Soit F_A le sous-ensemble des fonctions de l'espace E pour lesquelles la relation ci-dessous a lieu :

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(a_n) = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

   (a) Démontrer que le sous-ensemble F_A de E est un sous-espace vectoriel de E et que toutes les fonctions constantes de E appartiennent au sous-espace vectoriel F_A.

   (b) Soit g une fonction de l'espace E telle que, pour tout ε positif donné, il existe deux fonctions f_1 et f_2 appartenant au sous-espace vectoriel F_A telles que la fonction g soit comprise entre f_1 et f_2 et l'intégrale de la fonction g étendue à I soit comprise à ε près entre les intégrales des fonctions f_2 et f_1 :

   - pour tout réel x de I, $f_1(x) \leqslant g(x) \leqslant f_2(x)$,
   - $\displaystyle\int_0^1 f_2(x)\,\mathrm{d}x - \varepsilon \leqslant \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 f_1(x)\,\mathrm{d}x + \varepsilon.$

   Démontrer que la fonction g appartient au sous-espace vectoriel F_A.

   (c) Une partie P de E est dite dense dans E lorsque pour tout $g \in E$ et tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver $f \in P$ tel que $\|f - g\| \leqslant \varepsilon$.

   Démontrer que, pour que la suite A soit équi-répartie dans I, il suffit que le sous-espace vectoriel F_A contienne une partie P de E dense dans E.

2. **Une condition nécessaire et suffisante d'équi-répartition**

   Soit $A = (a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels a_n, $n \in \mathbb{N}^*$, appartenant à l'intervalle $I = [0,1]$.

   Soit J un intervalle, contenu dans l'intervalle I, d'extrémités c et d ; soit h_J la fonction égale à 1 sur l'intervalle J et à 0 sur le complémentaire de J dans I :

$$h_J(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ appartient à } J \text{ contenu dans } I, \\ 0 & \text{si } x \text{ appartient à } I \text{ sans appartenir à } J. \end{cases}$$

   (a) Démontrer que pour que la suite A soit équi-répartie dans I, il suffit que, pour tout intervalle J de I, la fonction h_J appartienne au sous-espace F_A de E.

   (b) Soit J un intervalle dont les extrémités c et d vérifient les inégalités : $0 < c < d < 1$.

   Étant donné un réel positif ε donné, $(\varepsilon > 0)$, déterminer deux fonctions continues f_1 et f_2 vérifiant les relations :

   - $f_1(0) = f_1(1)$, $f_2(0) = f_2(1)$, pour tout réel x de I, $f_1(x) \leqslant h_J(x) \leqslant f_2(x)$,
   - $\displaystyle\int_0^1 f_2(x)\,\mathrm{d}x - \varepsilon \leqslant \int_0^1 h_J(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 f_1(x)\,\mathrm{d}x + \varepsilon.$

   La construction claire des graphes des deux fonctions f_1 et f_2 tient lieu de réponse.

   Il est admis que la conclusion précédente est valable pour tout intervalle J, contenu dans l'intervalle I, sans que la condition $0 < c < d < 1$ sur ses extrémités soit réalisée.

   En déduire : pour que la suite $A = (a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ soit équi-répartie dans I, il suffit que toutes les fonctions continues prenant mêmes valeurs aux extrémités 0 et 1 de l'intervalle I appartiennent au sous-espace vectoriel F_A de E.

   (c) Étant donné un entier N $(N > 0)$, soit $N(J)$ le nombre de termes a_n de la suite A qui appartiennent à l'intervalle J et dont les indices n sont inférieurs ou égaux à N ; démontrer que, pour que la suite A soit équi-répartie dans I, il faut et il suffit que, pour tout intervalle J, la suite des réels $\dfrac{N(J)}{N}$, $N \in \mathbb{N}^*$, soit convergente et de limite $d - c$, lorsque l'entier N croît vers l'infini :

$$\lim_{N\to\infty} \frac{N(J)}{N} = d - c\,.$$

3. **Un critère d'équi-répartition modulo** I **(théorème de Bohl)**

   Étant donnés une suite de réels $R = (r_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et deux entiers naturels k et N strictement positifs, soit $C(R,k,N)$ le nombre complexe défini par la relation suivante :

$$C(R,k,N) = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \exp(2\mathrm{i}\pi k r_n)\,.$$

   (a) Démontrer que, si la suite $R = (r_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est équi-répartie modulo I, pour tout entier k strictement positif, la limite de l'expression $C(R,k,N)$, lorsque l'entier N croît indéfiniment, est nulle :

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \exp(2\mathrm{i}\pi k r_n) = 0\,.$$

   On admet que la réciproque est vraie : une suite de réels $(r_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est équi-répartie modulo I, si, pour tout entier k strictement positif, la limite, lorsque l'entier N croît vers l'infini, de l'expression $C(R,k,N)$ est nulle.

   (b) Exemple : soit θ un réel donné. Démontrer que la suite des réels $n\theta$, $n \in \mathbb{N}^*$, est équirépartie modulo I si et seulement si le réel θ est irrationnel.

Dans les questions suivantes le résultat classique de Cesaro est admis et peut être utilisé : si une suite réelle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et de limite ℓ, la suite de terme général $\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} x_n$, $N\in\mathbb{N}^*$, est convergente et de limite ℓ.

4. **Exemples de suites équiréparties modulo** I

   Dans cette question la suite $R=(r_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ considérée est définie à partir d'une fonction φ réelle définie sur la demi-droite fermée $[1,\infty[$: pour tout entier n $(n\geqslant 1)$ $r_n=\varphi(n)$.
   Soient r_n, A_n les nombres complexes définis par les relations suivantes :

$$d_n = r_{n+1} - r_n, \qquad A_n = \exp(2i\pi r_n).$$

   La fonction φ, définie sur la demi-droite $[1,\infty[$, est supposée à valeurs positives, de classe $\mathscr{C}^2$, concave ($\varphi''\leqslant 0$). En outre, dans un voisinage de l'infini, sa dérivée φ' est négligeable devant 1 et la fonction $\frac{1}{t}$ devant $\varphi'(t)$: $\varphi'(t)=o(1)$ et $\frac{1}{t}=o\big(\varphi'(t)\big)$.

   (a) Établir que les réels d_n, $n\in\mathbb{N}^*$, sont strictement positifs et que les deux suites de réels d_n et $\frac{1}{n d_n}$, $n\in\mathbb{N}^*$, tendent vers 0 lorsque l'entier n croît vers l'infini.

   Soient B_n les nombres complexes définis par la relation $B_n=\frac{1}{2i\pi}\left(\frac{A_{n+1}}{d_{n+1}}-\frac{A_n}{d_n}\right)$.
   Il est admis que, pour tout entier n strictement positif, l'inégalité ci-dessous a lieu :

$$|A_n - B_n| \leqslant \frac{1}{2\pi}\left|\frac{1}{d_{n+1}} - \frac{1}{d_n}\right| + \pi|d_n|.$$

   (b) Démontrer, lorsque l'entier N croît vers l'infini, la convergence vers 0 de la suite des réels $\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} A_n$, $N\in\mathbb{N}^*$: $\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} A_n = 0$.

   (c) Est-ce que la suite des réels $r_n=\varphi(n)$, $n\in\mathbb{N}^*$, est équi-répartie modulo I ?

5. **Suites** $(\ln^\alpha(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$

   Étant donné un réel α supérieur ou égal à 1 $(\alpha\geqslant 1)$, soient A_α la suite des réels $(\ln^\alpha(n))$, $n\in\mathbb{N}^*$ et ψ_α la fonction, définie sur la demi-droite $[1,\infty[$: $x\longmapsto \ln^\alpha(x)$.
   Pour quelles valeurs du réel α, les résultats de la question 4 permettent d'affirmer que la suite A_α est équirépartie ?

FIN DE L'ÉNONCÉ