Problème 2 : Pour tout $C\in\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, $\det\left(I_n+C\overline{C}\right)\in\mathbb{R}^+$: CCINP PSI 2021

I. Deux cas particuliers

1. Soient $c_1,\dots,c_n$ les cœfficients diagonaux de C, alors $\boxed{\det(I_n+C\overline{C})=\prod_{i=1}^{n}\left(1+|c_i|^2\right) \text{ est un réel, est supérieur à } 1}$ et $\boxed{\text{est égal à } 1}$ si et seulement si pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, $1+|c_i|^2=1$ (si l'un deux était >1, le produit le serait aussi) si et seulement si tous les c_i sont nuls $\boxed{\text{si et seulement si } C=0.}$

2. On écrit $C=PDP^{-1}$ avec $P\in\mathscr{GL}_n(\mathbb{R})$ et D diagonale.
Alors $\det\left(I_n+C^2\right)=\det\left(P\left(I_n+D^2\right)P^{-1}\right)=\det\left(I_n+D^2\right)=\det\left(I_n+D\overline{D}\right)$ car D réelle. La question précédente s'applique : $\boxed{\det\left(I_n+C^2\right)\geqslant 1 \text{ avec égalité si et seulement si } D=0 \text{ si et seulement si } C=0.}$

3. Il suffit d'appliquer le morphisme de conjugaison à la définition du déterminant
$$\det A=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\varepsilon(\sigma)a_{\sigma(1),1}\cdots a_{\sigma(n),n}.$$

4. On a, comme C est à cœfficients réels et avec la question précédente,
$$\det\left(I_n+C^2\right)=\det((C+\mathrm{i}I_n)(C-\mathrm{i}I_n))=\det(C+\mathrm{i}I_n)\det(C-\mathrm{i}I_n)=\det(C+\mathrm{i}I_n)\det\left(\overline{C+\mathrm{i}I_n}\right)=\det(C+\mathrm{i}I_n)\overline{\det(C+\mathrm{i}I_n)}$$
donc $\boxed{\det\left(I_n+C^2\right)=|\det(C-iI_n)|^2\in\mathbb{R}^+}$ et $\boxed{\det\left(I_n+C^2\right)=0 \text{ ssi } \det(C-iI_n)=0 \text{ ssi } i\in\mathrm{Sp}(C).}$

II. Le cas général

1. On calcule $\begin{pmatrix}I_n&-C\\ \overline{C}&I_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_n&0\\ -\overline{C}&I_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I_n+C\overline{C}&-C\\ 0&I_n\end{pmatrix}$. En utilisant la propriété des déterminants triangulaires par blocs, on obtient en prenant le déterminant $\boxed{\det\begin{pmatrix}I_n&-C\\ \overline{C}&I_n\end{pmatrix}\times 1=\det\left(I+C\overline{C}\right).}$

2. On a directement $\boxed{\mathrm{Mat}_{(e_2,e_1)}(\varphi)=\begin{pmatrix}u&t\\ s&r\end{pmatrix}}$ avec la définition : $u(e_2)=ue_2+se_1$ et $u(e_1)=te_2+re_1$

3. Si u est l'endomorphisme canoniquement associé à $\begin{pmatrix}R&S\\ T&U\end{pmatrix}$, $(e_1,\dots,e_{2n})$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$, alors la matrice de u dans la base $(e_{n+1},\dots,e_{2n},e_1,\dots,e_n)$ est $\begin{pmatrix}U&T\\ S&R\end{pmatrix}$ et la matrice de u dans la base $(e_1,\dots,e_n,-e_{n+1},\dots,-e_{2n})$ (libre de bonne taille) est $\begin{pmatrix}R&-S\\ -T&U\end{pmatrix}$ donc
$$\boxed{\begin{pmatrix}R&S\\ T&U\end{pmatrix},\begin{pmatrix}U&T\\ S&R\end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix}R&-S\\ -T&U\end{pmatrix} \text{ sont semblables.}}$$

4. D'après la question précédente, C_0 est semblable à $\begin{pmatrix}I_n&\overline{C}\\ -C&I_n\end{pmatrix}$ qui est semblable à $\begin{pmatrix}I_n&-\overline{C}\\ C&I_n\end{pmatrix}=\overline{C}_0$.
Le polynôme caractéristique étant un invariant de similitude, et avec la question I.3, on obtient $\chi_{C_0}=\chi_{\overline{C}_0}=\overline{\chi_{C_0}}$ donc $\boxed{\chi_{C_0}\in\mathbb{R}[X].}$

5. (a) Soit $\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_{2n,1}(\mathbb{C})$. $\boxed{C_0\Omega\left(\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}\right)}=C_0\begin{pmatrix}-\overline{Y}\\ \overline{X}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\overline{Y}-C\overline{X}\\ -\overline{C}\,\overline{Y}+\overline{X}\end{pmatrix}=\Omega\left(\begin{pmatrix}X-CY\\ \overline{C}X+Y\end{pmatrix}\right)\boxed{=\Omega\left(C_0\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}\right).}$

(b) Vérification immédiate : pour tout $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2n,1}(\mathbb{C})$, $\Omega \circ \Omega\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right) = -\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$, donc $\boxed{\Omega^2 = -\mathrm{id}.}$

(c) Se vérifie directement avec la définition de Ω.

6. Soit $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2n,1}(\mathbb{C}) \setminus \{0_{\mathscr{M}_{2n,1}(\mathbb{C})}\}$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ tels que $\lambda\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \mu\Omega\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right) = 0$ donc $\lambda X - \mu\overline{Y} = 0$ (1) et $\lambda Y + \mu\overline{X} = 0$ (2).

   Alors $\overline{\lambda}(1) + \mu\overline{(2)}$ donne $\left(|\lambda|^2 + |\mu|^2\right) X = 0$ et $-\mu\overline{(1)} + \overline{\lambda}(2)$ donne $\left(|\lambda|^2 + |\mu|^2\right) Y = 0$. Or soit $X \neq 0$, soit $Y \neq 0$ donc $|\lambda|^2 + |\mu|^2 = 0$

   ce qui donne $\lambda = \mu = 0$ car on somme des nombres positifs : $\boxed{\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \Omega\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right)\right) \text{ est libre.}}$

   Soit $P = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \Omega\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right)\right)$. On a, $\Omega\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right) \in P$ et $\Omega\left(\Omega\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right)\right) = -\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in P$ en utilisant 5.b, et comme Ω est « presque linéaire », elle vérifie

$$\forall\, C, C' \in \mathscr{M}_{2n,1}(\mathbb{C}),\quad \forall\, \lambda \in \mathbb{C},\quad \Omega(C + \lambda C') = \Omega(C) + \overline{\lambda}\Omega(C'),$$

   on en déduit que $\boxed{P \text{ est stable par } \Omega.}$

7. Un vecteur de $E \cap \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \Omega\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right)\right)$ s'écrit $U = \alpha\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \beta\Omega\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right) \in E$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

   En composant par Ω, avec la question 5, on obtient $\Omega(U) = \overline{\alpha}\Omega\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right) - \overline{\beta}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in E$ par stabilité de E.

   Mais alors $\overline{\alpha}U - \mu\Omega(U) = \left(|\alpha|^2 + |\beta|^2\right)\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in E$. Comme $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \notin E$, $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 0$ donc $\alpha = \beta = 0$.

   Ainsi, $\boxed{E \cap \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \Omega\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right)\right) = \{0_{\mathscr{M}_{2n,1}(\mathbb{C})}\}.}$

8. Soit $U \in F_\lambda$. On montre que $\Omega(U) \in F_{\overline{\lambda}}$.
   Or $\left(\overline{\lambda} I_{2n} - C_0\right)\Omega(U) = \overline{\lambda}\Omega(U) - C_0\Omega(U) = \Omega(\lambda U) - \Omega(C_0 U)$ par la question 5. En observant la définition de Ω, on peut alors écrire, $\left(\overline{\lambda} I_{2n} - C_0\right)\Omega(U) = \Omega(\lambda U - C_0 U) = \Omega((\lambda I_{2n} - C_0)U)$.
   En réitérant $\alpha_{\overline{\lambda}}$ fois, on obtient $\left(\overline{\lambda} I_{2n} - C_0\right)^{\alpha_{\overline{\lambda}}}\Omega(U) = \Omega((\lambda I_{2n} - C_0)^{\alpha_{\overline{\lambda}}} U)$.
   Or $\chi_{C_0} \in \mathbb{R}[X]$ d'après 4, donc $\alpha_\lambda = \alpha_{\overline{\lambda}}$ et $\left(\overline{\lambda} I_{2n} - C_0\right)^{\alpha_{\overline{\lambda}}}\Omega(U) = \Omega((\lambda I_{2n} - C_0)^{\alpha_\lambda} U) = \Omega(0) = 0$ car $U \in F_\lambda$ et par linéarité.
   Finalement, $\Omega(F_\lambda) \subset F_{\overline{\lambda}}$ et comme, par 5.b, Ω est un isomorphisme, $\dim\Omega(F_\lambda) = \dim F_\lambda = \alpha_\lambda = \alpha_{\overline{\lambda}} = \dim F_{\overline{\lambda}}$ en utilisant le résultat admis. Ainsi, $\boxed{\Omega(F_\lambda) = F_{\overline{\lambda}}.}$

9. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(C_0) \cap \mathbb{R}$. D'après la question précédente, F_λ est stable par Ω.
   Soit $F_\lambda = \mathscr{M}_{2n,1}(\mathbb{C})$ et F_λ de dimension paire $(2n)$, soit on peut trouver $U \in \mathscr{M}_{2n,1}(\mathbb{C}) \setminus F_\lambda$.
   Alors d'après 6 et 7, on a un plan P_1 stable par Ω tel que F_λ et P_1 sont en somme directe.
   Soit $E_1 = F_\lambda \oplus P_1$. E_1 est stable par Ω car F_λ et P_1 le sont et de dimension $\dim F_\lambda + 2$. Soit $E_1 = \mathscr{M}_{2n,1}(\mathbb{C})$ et F_λ est de dimension paire $(2n-2)$, soit ce n'est pas le cas et on peut réitérer.
   Par récurrence, tant que le procédé ne s'arrête pas, on construit des plans $P_1, P_2, \ldots, P_k$ tels que $E_k = F_\lambda \oplus P_1 \oplus \cdots \oplus P_k$ est un sous-espace stable par Ω et $P_1, \ldots, P_k$ des plans stables.
   Comme $\dim E_k = \dim F_\lambda + 2k$ est strictement croissante et majorée par $2n$, le procédé s'arrête, donc on a un k tel que $E_k = F_\lambda \oplus P_1 \oplus \cdots \oplus P_k = \mathscr{M}_{2n,1}(\mathbb{C})$ et donc $\boxed{\dim F_\lambda = 2n - 2k \text{ est paire.}}$

10. Comme χ_{C_0} est scindé, $\det C_0 = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}\, C_0} \lambda^{\alpha_\lambda}$.

    Or dans ce produit, soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et d'après la question précédente, $\lambda^{\alpha_\lambda} \in \mathbb{R}^+$, soit $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ et comme $\chi_{C_0} \in \mathbb{R}[X]$, $\overline{\lambda} \in \mathrm{Sp}\, C_0$ avec $\alpha_{\overline{\lambda}} = \alpha_\lambda$ et en rassemblant λ et $\overline{\lambda}$ on obtient $|\lambda|^{2\alpha_\lambda} \in \mathbb{R}^+$.

    Finalement, $\boxed{\det C_0 \in \mathbb{R}^+.}$

    Remarque : avec un résultat vu en TD, on obtient bien $\det C_0 = \det\left(I_n + C\overline{C}\right)$ *car* I_n *est inversible et commute avec* $\overline{C}$.

Fin