Devoir Libre n° 4

[CCINP] Pour tout $C \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, $\det\left(I_n + C\overline{C}\right) \in \mathbb{R}^+$

Dans ce problème, n désigne un entier non nul fixé.

On note $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ (respectivement $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$) l'espace vectoriel des matrices carrées de taille n à coefficients dans $\mathbb{C}$ (respectivement $\mathbb{R}$), $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices inversibles de taille n à coefficients dans $\mathbb{C}$ et $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des matrices colonnes de taille n à coefficients dans $\mathbb{C}$.

Pour toute matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, on note $\chi_M = \det(XI_n - M)$ son polynôme caractéristique et $\mathrm{Sp}(M)$ l'ensemble de ses valeurs propres complexes. On pourra utiliser librement les produits matriciels par blocs.

Objectifs

On s'intéresse dans la **Partie I** à trois cas particuliers.

On montre d'abord que $\det\left(I_n + C\overline{C}\right) \geqslant 1$ dans le cas particulier des matrices diagonales complexes C, où $\overline{C}$ désigne la matrice conjuguée de C, c'est-à-dire la matrice obtenue en considérant le conjugué de chaque coefficient de C.

On considère ensuite le cas des matrices réelles C pour lesquelles on démontre que

$$\det\left(I_n + C^2\right) \in \mathbb{R}^+.$$

La **Partie II** est consacrée au cas général.

On montre que pour toute matrice C de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, $\det\left(I_n + C\overline{C}\right) \in \mathbb{R}^+$.

I. Deux cas particuliers

1. On se place dans le cas particulier où C est une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ diagonale. Démontrer que $\det\left(I_n + C\overline{C}\right) \in \mathbb{R}$ et que $\det(I_n + C\overline{C}) \geqslant 1$, avec égalité si et seulement si $C = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{C})}$.
2. On se place dans le cas particulier où C est une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable. Démontrer que $\det\left(I_n + C^2\right) \geqslant 1$, avec égalité si et seulement si $C = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$.
3. Démontrer que $\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}), \det\left(\overline{A}\right) = \overline{\det(A)}$.
4. On suppose dans cette question que C est une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Déduire de la question précédente que, dans ce cas, on a :

$$\det(I_n + C^2) = |\det(C - iI_n)|^2.$$

En déduire que $\det\left(I_n + C^2\right) \in \mathbb{R}^+$ et que $\det\left(I_n + C^2\right) = 0$ si et seulement si $i \in \mathrm{Sp}(C)$.

II. Le cas général

On considère dans cette partie une matrice C de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et on démontre que $\det\left(I_n + C\overline{C}\right) \in \mathbb{R}^+$. Seule la question 3. de la partie I sera utile pour la suite.

1. En considérant le produit matriciel $\begin{pmatrix} I_n & -C \\ \overline{C} & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -\overline{C} & I_n \end{pmatrix}$, démontrer que :

$$\det\left(I_n + C\overline{C}\right) = \det\begin{pmatrix} I_n & -C \\ \overline{C} & I_n \end{pmatrix}$$

On notera désormais : $C_0 = \begin{pmatrix} I_n & -C \\ \overline{C} & I_n \end{pmatrix}$

2. Soient $(r, s, t, u) \in \mathbb{C}^4$ et (e_1, e_2) la base canonique de $\mathbb{C}^2$. On note φ l'endomorphisme de $\mathbb{C}^2$ dont la matrice dans la base (e_1, e_2) est $\begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix}$. Exprimer la matrice de φ dans la base (e_2, e_1).
3. Soit $(R, S, T, U) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{C}))^4$. En s'inspirant de la question précédente, montrer que la matrice $\begin{pmatrix} R & S \\ T & U \end{pmatrix}$ est semblable dans $\mathscr{M}_{2n}(\mathbb{C})$ à la matrice $\begin{pmatrix} U & T \\ S & R \end{pmatrix}$. Montrer de même que $\begin{pmatrix} R & S \\ T & U \end{pmatrix}$ est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} R & -S \\ -T & U \end{pmatrix}$.
4. En déduire que le polynôme caractéristique de la matrice C_0 est à coefficients réels.

Pour la suite, nous écrirons les vecteurs de $\mathscr{M}_{2n,1}(\mathbb{C})$ sous la forme $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$, où $(X, Y) \in (\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C}))^2$.

On considère l'application $\Omega : \mathscr{M}_{2n,1}(\mathbb{C}) \to \mathscr{M}_{2n,1}(\mathbb{C})$ définie par :

$$\forall \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2n,1}(\mathbb{C}),\ \Omega\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -\overline{Y} \\ \overline{X} \end{pmatrix}.$$

5. Démontrer les propriétés suivantes de l'application Ω :
   (a) Pour tout $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2n,1}(\mathbb{C})$, $C_0\Omega\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right) = \Omega\left(C_0\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right)$;
   (b) $\Omega \circ \Omega = -\mathrm{id}_{\mathscr{M}_{2n,1}(\mathbb{C})}$;
   (c) Pour tout $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2n,1}(\mathbb{C})$ et tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $\Omega\left(\lambda\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right) = \overline{\lambda}\Omega\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right)$
6. Soit $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2n,1}(\mathbb{C}) \setminus \{0_{\mathscr{M}_{2n,1}(\mathbb{C})}\}$.

   Montrer que la famille $\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \Omega\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right)\right)$ est libre et que le plan $\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \Omega\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right)\right)$ est stable par Ω.
7. Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{2n,1}(\mathbb{C})$ stable par Ω et soit $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2n,1}(\mathbb{C}) \setminus E$.

   Montrer que :

$$E \cap \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \Omega\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right)\right) = \{0_{\mathscr{M}_{2n,1}(\mathbb{C})}\}.$$

Pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(C_0)$, on note $\alpha_\lambda \in \mathbb{N}^*$ sa multiplicité comme racine du polynôme caractéristique. On peut donc écrire : $\chi_{C_0} = \prod_{\lambda \, \mathrm{Sp}(C_0)} (X - \lambda)^{\alpha_\lambda}$. On note alors, pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(C_0)$:

$$F_\lambda = \mathrm{Ker}\left((\lambda I_{2n} - C_0)^{\alpha_\lambda}\right).$$

On admet, pour traiter la question 10. que pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(C_0)$, on a : $\dim F_\lambda = \alpha_\lambda$.

8. Montrer que pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(C_0)$, on a : $\Omega(F_\lambda) = F_{\overline{\lambda}}$.
9. Montrer que si $\lambda \in \mathrm{Sp}(C_0) \cap \mathbb{R}$, alors F_λ est de dimension paire.
10. Conclure que : $\det(C_0) \in \mathbb{R}^+$.

FIN DE L'ÉNONCÉ