Mines - Ponts 1999 Première épreuve de Mathématiques Filière M.P.

Etude des suites équi-réparties et critères d'équi-répartition — *Luc Verschueren*
(Bibliographie : Exbrayat et Alessandri p 139 chez Masson) — *Lycée Daudet Nîmes*

Question 1) : Un critère d'équi-répartition

a) F_A est un sous-espace de E

F_A contient bien sûr la fonction constante nulle, et toutes les fonctions constantes :

pour $f(x) = c$ on a $\dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{n=1}^{N} f(a_n) = \dfrac{c\,N}{N} = \int_0^1 f(x)\,dx = c$

Si f est une combinaison linéaire de fonctions $(f_1, f_2, \ldots, f_k)$ de F_A , la suite des moyennes :

$M_N(f) = \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{n=1}^{N} f(a_n)$ est la combinaison linéaire des suites des moyennes $\big(M_N(f_i)\big)_{1\leq i\leq k}$

et ces suites étant convergentes , elle converge vers la combinaison linéaire des limites qui est l'intégrale de f : F_A est stable par combinaison linéaire $\boxed{F_A \text{ est un sous-espace vectoriel de } E}$

b) Densité

Puisque : $\forall x \in [0,1] \quad f_1(x) \leq g(x) \leq f_2(x)$, cet encadrement passe aux moyennes :

$\forall N \in \mathbb{N} \quad M_N(f_1) \leq M_N(g) \leq M_N(f_2)$

Pour $\varepsilon > 0$ donné , il existe f_1 et f_2 vérifiant les conditions de l'énoncé , et $\forall N \in \mathbb{N}$:

$$\int_0^1 f_2(x)\,dx - M_N(f_2) - \varepsilon \leq \int_0^1 g(x)\,dx - M_N(g) \leq \int_0^1 f_1(x)\,dx - M_N(f_1) + \varepsilon$$

Or puisque f_1 et f_2 sont dans F_A pour le ε choisi , il existe un entier N_1 à partir duquel

$M_N(f_1)$ approche $\displaystyle\int_0^1 f_1(x)\,dx$ à ε près , et de même il existe N_2 pour f_2

Soit $N_0 = \sup(N_1, N_2)$:

$$\forall N \in \mathbb{N} \quad , \quad N > N_0 \quad : \quad -2\,\varepsilon \leq \int_0^1 g(x)\,dx - M_N(g) \leq 2\,\varepsilon$$

Ainsi : $\boxed{\lim\limits_{N\to\infty}\left[\dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{n=1}^{N} g(a_n)\right] = \int_0^1 g(x)\,dx \text{ et } g \in F_A}$

c) Une condition suffisante

Vue la définition : $\boxed{A \text{ est équi-répartie dans } I \text{ si et seulement si } F_A = E}$

Si F_A contient une partie P dense dans E au sens de la norme de la convergence uniforme utilisée dans ce problème : $\|f\| = \sup\limits_{x\in[0,1]} |f(x)|$ alors :

Pour tout g de E et pour tout $\varepsilon > 0$: il existe f dans P (donc dans F_A) telle que :

$\forall x \in [0,1] \qquad f(x) - \dfrac{\varepsilon}{2} \leq g(x) \leq f(x) + \dfrac{\varepsilon}{2}$

Soit alors $f_1 = f - \dfrac{\varepsilon}{2}$ et $f_2 = f + \dfrac{\varepsilon}{2}$ elles sont dans F_A (combinaisons linéaires et fonctions constantes) et vérifient les deux conditions de la question précédente.

Car pour la deuxième condition :

$$\int_0^1 f_2(x)\,dx - \varepsilon = \int_0^1 f(x)\,dx - \frac{\varepsilon}{2} \leq \int_0^1 g(x)\,dx \leq \int_0^1 f(x)\,dx + \frac{\varepsilon}{2} = \int_0^1 f_1(x)\,dx + \varepsilon$$

Donc g est dans F_A et $E \subset F_A$ entraine $E = F_A$

$\boxed{\text{On a bien une condition suffisante pour assurer } A \text{ équi-répartie dans } I}$

Question 2) : Une condition nécessaire et suffisante

La fonction notée h_J dans l'énoncé est la fonction caractéristique de J

a) Fonctions en escalier

Si pour tout J intervalle de I , la fonction h_J est dans F_A , par combinaison linéaire :

$\boxed{\text{Les fonctions en escalier sont dans } F_A}$

Ainsi F_A contient la partie $\boxed{P_1 \text{ ensemble des fonctions en escalier dans } I}$

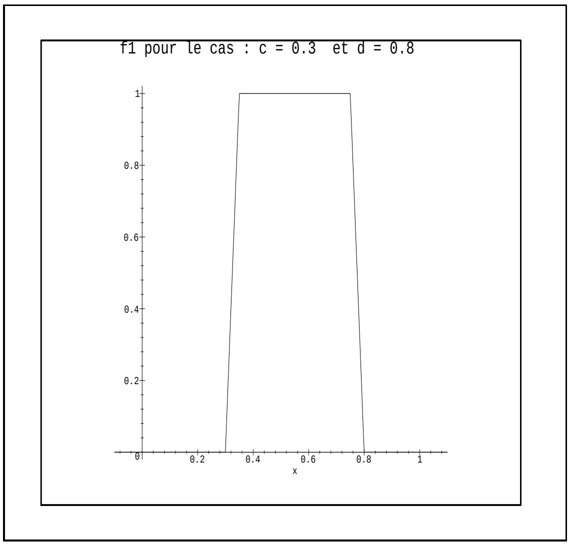
qui est un sous-espace vectoriel de E , et cette partie est dense dans E.

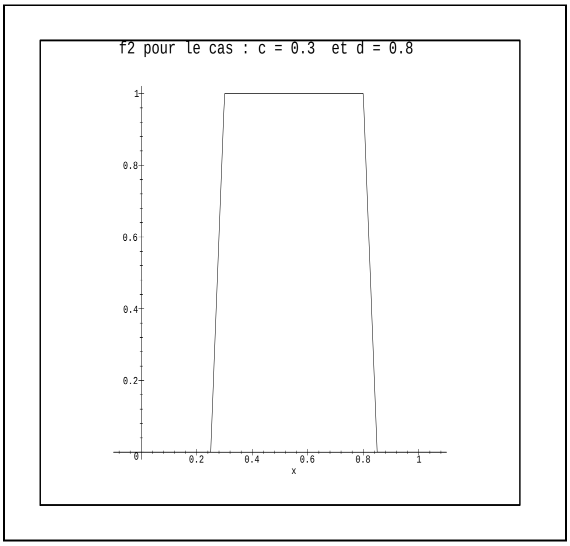
La question précédente conclut : $\boxed{A \text{ est équi-répartie dans } I}$

b) Fonctions continues sur I prolongeables en des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et $1-$périodiques

Il suffit de construire des fonctions continues et affines par morceaux dont les graphes bordent des trapèzes inclus (pour f_1) et comprenant (pour f_2) le rectangle bordé par le graphe de h_J.

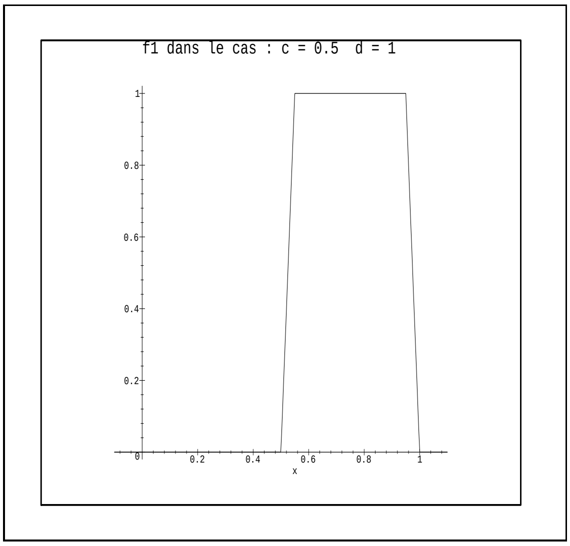
Pour ces fonctions : $f_1(0) = f_1(1) = f_2(0) = f_2(1) = 0$

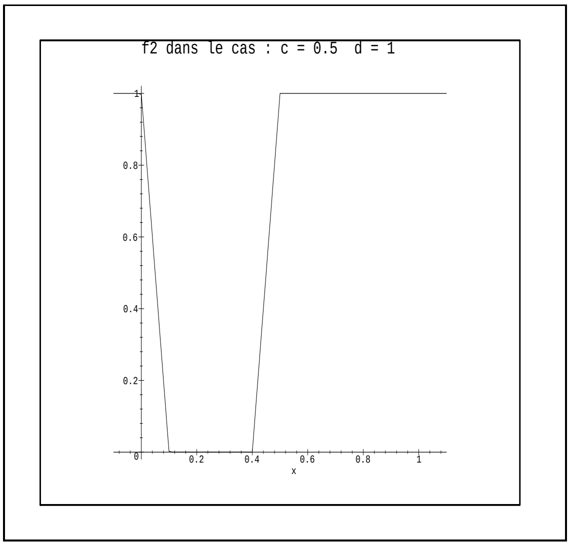




Pour des intervalles J tels que $c = 0$ (respectivement $d = 1$) , il suffit de faire remonter (respectivement descendre) notre fonction affine par morceaux jusqu'à 1 (resp 0) sur l'intervalle $[1-\varepsilon, 1]$ (resp $[0, \varepsilon]$)

Pour ces fonctions : $f_1(0) = f_1(1) = 0$ et : $f_2(0) = f_2(1) = 1$





Soit $\boxed{P_2 \text{ l'ensemble des fonctions continues sur } I \text{ et telles que } f(0) = f(1)}$

(qui est aussi un sous-espace vectoriel de E). Si $\boxed{F_A \text{ contient } P_2}$, avec la question **1) b)** , il contient toutes les fonctions h_J , donc avec la question **2) a)** , $\boxed{A \text{ est équi-répartie dans } I}$

c) Répartition des a_n dans $[0, 1]$

D'une part : $N(J) = \text{card}\{\ a_n\ /\ 1 \le n \le N \quad \text{et } a_n \in J\} = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} h_J(a_n)$ donc $\displaystyle\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} h_J(a_n) = \frac{N_J}{N}$

D'autre part : $\displaystyle\int_0^1 h_J(x)\,dx = \big(d-c\big)$

Pour les h_J : $\displaystyle\Big(\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} h_J(a_n) = \int_0^1 h_J(x)\,dx\Big) \Longleftrightarrow \Big(\lim_{N\to\infty}\frac{N_J}{N} = \big(d-c\big)\Big)$

Donc : $\boxed{\Big(h_J \in F_A\Big) \Longleftrightarrow \Big(\lim_{N\to\infty}\frac{N_J}{N} = \big(d-c\big)\Big)}$

et $\boxed{\Big(A \text{ est équi-répartie dans } I\Big) \Longleftrightarrow \Big(\text{ Pour tout intervalle } J \text{ dans } I :\ \lim_{N\to\infty}\frac{N_J}{N} = \big(d-c\big)\Big)}$

Question 3) : Un critère d'équi-répartition modulo I

Pour $k \in \mathbb{Z}$ considérons la fonction notée e_k définie par : $x \in \mathbb{R} \to \exp(2i\pi\, k\, x)$

C'est une fonction de E et même $\boxed{e_k \in P_2}$ car continue sur $\mathbb{R}$ et $e_k(0) = 1 = e_k(1)$

a) Moyenne des images sur le cercle unité :

Si la suite $R = \big(r_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est équi-répartie , pour tout $k \in \mathbb{N}$, la suite des moyennes des valeurs de $e_k(r_n)$ doit tendre vers : $\displaystyle\int_0^1 e_k(x)\,dx$ Or pour $k > 0$ l'intégrale vaut : $\displaystyle\left[\frac{\exp(2\,i\,\pi\,k\,x)}{2\,i\,\pi\,k)}\right]_{x=0}^{x=1} = 0$

$$\boxed{\text{Si : } R = \big(r_n\big)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est équi-répartie , alors } \forall k > 0 \quad \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\exp(2i\pi\,k\,r_n) = 0}$$

b) Réciproque

Si $\forall k > 0$: $\displaystyle\lim_{N\to\infty} C(R,k,N) = 0$, alors $\boxed{\forall k \in \mathbb{Z} \quad e_k \in F_R}$ en effet :

- pour $k = 0$ on a $e_0 = 1$ constante qui est dans F_R de toute façon
- si la limite de la suite de complexes est nulle, la suite des conjugués a aussi une limite nulle :

  $\displaystyle\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\exp(-2\,i\,\pi\,k\,r_n) = 0$ donc e_{-k} est dans F_R

Par combinaison linéaire , si $\boxed{P_3 \text{ est l'ensemble des polynômes trigonométriques de période 1}}$

on assure que $\boxed{P_3 \subset F_R}$.

Or par le théorème de Weierstrass trigonométrique , P_3 est dense dans $\widetilde{P}_2$, l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et 1-périodiques , pour la topologie de la norme de la convergence uniforme employée ici. Toute fonction de P_2 est la restriction à $[0,1]$ d'une fonction de $\widetilde{P}_2$

Conclusion : P_3 est dense dans P_2 , et $P_3 \subset F_R$ donc avec **1) b)** : $P_2 \subset F_R$ et avec **2) b)** cela assure :

$$\boxed{\Big(R \text{ est équi-répartie dans } I\Big) \Longleftrightarrow \Big(\forall k \in \mathbb{N} \quad k > 0 \quad \lim_{N\to\infty} C(R,k,N) = 0\Big)}$$

c) Suites arithmétiquess équi-réparties

- Si $\boxed{\theta \in \mathbb{Q}}$ il existe $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tels que : $\theta = \dfrac{p}{q}$

  Alors pour $k = q > 0$ la suite des $C(R,q,N)$ est constante égale à 1 : elle ne tend pas vers 0 donc par le critère précédent $\boxed{\text{La suite } \big(n\,\theta\big)_{n\in\mathbb{N}} \text{ n'est pas équi-répartie}}$

- Si $\boxed{\theta \notin \mathbb{Q}}$ alors $\forall k \in \mathbb{N}^*$ fixé : $\boxed{\alpha = \exp(2i\pi\,k\,\theta) \neq 1}$

  On a alors dans $C(R,k,N)$ une somme d'une suite géométrique de raison α , et donc :

  $\displaystyle C(R,k,N) = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\alpha^n = \frac{\alpha}{N}\frac{1-\alpha^n}{1-\alpha}$ et α est un complexe de module 1

  on peut donc majorer : $\displaystyle\big|C(R,k,N)\big| \leq \frac{1}{N}\frac{2}{|1-\alpha|}$ ce qui tend vers 0 quand N tend vers l'infini.

  Par le critère précédent : $\boxed{\text{La suite } \big(n\,\theta\big)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est alors équi-répartie}}$

Question 4) : Exemples de suites équi-réparties modulo I

a) Etude des suites : $\big(d_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\displaystyle\left(\frac{1}{n\,d_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

- On suppose : $\varphi'(t) = o(1)$, donc $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\varphi'(t) = 0$. Avec $\varphi'' \leq 0$ cela assure que :

  $\boxed{\varphi'(t) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ en décroissant}}$

  De plus : $\dfrac{1}{t} = o(\varphi'(t))$ donc : $\varphi'(t)$ n'est pas identiquement nul à partir d'un certain $t_0 \geq 1$.

  Donc $\boxed{\varphi'(t) > 0 \text{ sur } [1,\infty[}$

  Enfin : φ est strictement croissante sur $[1,\infty[$ et $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \qquad d_n = r_{n+1} - r_n > 0}$

- Ensuite : $\displaystyle d_n = r_{n+1} - r_n = \varphi(n+1) - \varphi(n) = \int_n^{n+1}\varphi'(x)\,dx$

  Puisque $\varphi'(t) = o(1)$: $\forall\varepsilon > 0,\quad \exists t_0 \geq 1,\quad \forall t \geq t_0 \quad |\varphi'(t)| < \varepsilon$ ce qui entraine : $|d_n| < \varepsilon$ pour tous les $n \geq t_0$, ainsi $\boxed{d_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0}$

- De même : $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists t_1 \geq 1 \quad \forall t \geq t_1 \quad \left|\dfrac{1}{t}\right| < \varepsilon |\varphi'(t)|$ ce qui entraine pour $n \geq t_1$:

  $\varphi'(t) > \dfrac{1}{\varepsilon}.\dfrac{1}{n+1}$ sur $[n, n+1]$ par décroissance de $t \to 1/t$

  Pour $n \geq t_1$ on a : $|d_n| > \dfrac{1}{\varepsilon}.\dfrac{1}{n+1}$, et ainsi : $\boxed{\dfrac{1}{n\, d_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0}$

b) Moyennes des A_n

On pose : $\forall n \in \mathbb{N} \qquad B_n = \dfrac{1}{2i\pi}\left[\dfrac{A_{n+1}}{d_{n+1}} - \dfrac{A_n}{d_n}\right]$ et on admet : $|A_n - B_n| = \dfrac{1}{2\pi}\left|\dfrac{1}{d_{n+1}} - \dfrac{1}{d_n}\right| + \pi |d_n|$

Notons $M_N(A)$ la moyenne : $M_N(A) = \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{n=1}^{N} A_n$ Alors : $\boxed{M_N(A) = M_N(A-B) + M_N(B)}$

- Par récurrence claire sur N : $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} B_n = \dfrac{1}{2i\pi}\left[\dfrac{A_{N+1}}{d_{N+1}} - \dfrac{A_1}{d_1}\right]$

  donc : $\left|\dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{n=1}^{N} B_n\right| \leq \dfrac{1}{2\pi\, N}\left|\dfrac{A_{N+1}}{d_{N+1}}\right| + \left|\dfrac{A_1}{d_1}\right| \leq \dfrac{1}{2\pi\, N\, d_{N+1}} + \dfrac{1}{2\pi\, N\, d_1}$ puisque A_n est un complexe de module 1

  Le majorant tend vers 0. Donc $\boxed{\lim\limits_{N\to\infty} M_N(B) \;=\; 0}$

- Par l'inégalité admise : $|M_N(A-B)| \leq \dfrac{1}{2\, N\, \pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\left|\dfrac{1}{d_{n+1}} - \dfrac{1}{d_n}\right| + \dfrac{\pi}{N}\displaystyle\sum_{n=1}^{N}|d_n|$

  Puisque $|d_n| \to 0$ avec le résultat de Cesaro : $\dfrac{\pi}{N}\displaystyle\sum_{n=1}^{N}|d_n| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

  Puisque les d_n sont des <u>réels strictement positifs</u> et que φ' est décroissante on peut préciser :

  $$d_{n+1} = \varphi(n+2) - \varphi(n+1) = \int_{n+1}^{n+2} \varphi'(x)\, dx \leq \int_{n}^{n+1} \varphi'(x)\, dx = \varphi(n+1) - \varphi(n) = d_n$$

  La suite $\boxed{\left(\dfrac{1}{d_n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ de réels positifs est croissante}}$ strictement d'ailleurs

  ainsi : $\dfrac{1}{2\, N\, \pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\left|\dfrac{1}{d_{n+1}} - \dfrac{1}{d_n}\right| = \dfrac{1}{2\, N\, \pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\left(\dfrac{1}{d_{n+1}} - \dfrac{1}{d_n}\right) = \dfrac{1}{2\, N\, \pi}\left(\dfrac{1}{d_{N+1}} - \dfrac{1}{d_1}\right)$

  ce qui tend vers 0 avec le résultat de **4) a)**

  Avec la somme des deux : $\boxed{\lim\limits_{N\to\infty} M_N(A-B) \;=\; 0}$

  - conclusion : $\boxed{\lim\limits_{N\to\infty} \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{n=1}^{N} A_n \;=\; 0}$

c) Equi-répartition de la suite des $\varphi(n)$

On vient de montrer que : $\lim\limits_{N\to\infty} C(R,k,N) = 0$ $\boxed{\text{pour } k = 1}$

Pour les autres $k > 0$ de $\mathbb{N}$ on peut appliquer le résultat ci-dessus $\boxed{\text{à la fonction } \psi = k\varphi}$ qui vérifie clairement les mêmes hypothèses

On a donc les hypothèses du <u>critère **3) c)**</u> et $\boxed{\text{La suite } R = \big(\varphi(n)\big)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est équi-répartie dans } I}$

Question 5) : Exemples des suites puissances du logarithme

a) Pour quel α ?

ψ_α définie par : $x \to \ln^\alpha(x)$ est pour $\alpha \geq 1$ définie sur $[1, \infty[$, à valeurs positives ,

de classe C^2 et : $\boxed{{\psi_\alpha}'(x) = \dfrac{\alpha}{x}\ln^{\alpha-1}(x)}$

Ceci assure que ${\psi_\alpha}'(t) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc que la fonction $\boxed{{\psi_\alpha}' \text{ est un } o(1)}$

De plus $\boxed{\text{pour } \alpha > 1}$ on a : $t{\psi_\alpha}'(t) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ et son inverse tend vers 0 ,

donc $\boxed{\dfrac{1}{t} = o({\psi_\alpha}')}$ au voisinage de l'infini .

Enfin : ${\psi_\alpha}''(x) = \alpha\left[\dfrac{-1}{x^2}\ln^{\alpha-1}(x) + \dfrac{\alpha-1}{x^2}\ln^{\alpha-2}(x)\right] = \dfrac{\alpha}{x^2}\ln^{\alpha-2}(x)\,[(\alpha-1) - \ln(x)]$

donc $\boxed{{\psi_\alpha}'' \text{ est négative à partir de } x_0 = e^{\alpha-1}}$

Or si on modifie les hypothèses concernant φ en les assurant sur $[n_0, \infty[$ avec $n_0 = [x_0] + 1$, on aura les mêmes résultats sur les moyennes en commençant les sommes en $n = n_0$ plutôt qu'en $n = 1$.

Mais si $\lim\limits_{N\to\infty} \dfrac{1}{N} \sum\limits_{n=n_0}^{N} A_n \ = \ 0$ cela entraine : $\lim\limits_{N\to\infty} \dfrac{1}{N} \sum\limits_{n=1}^{N} A_n \ = \ 0.$

Par l'étude de la question **4)** $\boxed{\text{pour } \alpha > 1 \text{ la suite } A_\alpha = \big(\ln^\alpha(n)\big)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est équi-répartie modulo } I}$

b) Une primitive

Soit f la fonction $t \to \exp(2i\pi\ \ln(t))$. f est de classe C^∞ sur $]0, \infty[$ et $\boxed{f'(t) = \dfrac{2i\pi}{t} f(t)}$

Ainsi : $\displaystyle\int_1^x f(t)\,dt = \frac{1}{2i\pi}\int_1^x t\,f'(t)\,dt = \frac{1}{2i\pi}\left[\Big[t\,f(t)\Big]_{t=1}^{t=x} - \int_1^x f(t)\,dt\right]$ par partie

et : $\displaystyle\left[1 + \frac{1}{2i\pi}\right]\int_1^x f(t)\,dt = \frac{1}{2i\pi}\big[x\,f(x) - 1\big]$

enfin : $\boxed{\displaystyle\int_1^x f(t)\,dt = \frac{1}{1+2i\pi}\big[x\,f(x) - 1\big] \text{ est une primitive de } f}$

c) Cas $\alpha = 1$

Pour $N > 1$ avec le calcul ci-dessus :

$$I_N = \frac{1}{N(1+2i\pi)}\big[N\ \exp(2i\pi\ln(N)) - 1\big] = \frac{1}{1+2i\pi}\left[\exp(2i\pi\ln(N)) - \frac{1}{N}\right]$$

donc : $\boxed{|I_N| \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{\sqrt{1+4\pi^2}}}$

Mais $\displaystyle L_N - I_N = \frac{1}{N}\left[\sum_{n=1}^{N} f(n) - \int_1^N f(t)\,dt\right]$

avec l'intégration par partie classique de la comparaison série-intégrale :

$$f(n) - \int_{n-1}^{n} f(t)\,dt = \int_{n-1}^{n}\big[t - (n-1)\big]\,f'(t)\,dt = \int_{n-1}^{n}[t]\,f'(t)\,dt$$

avec la partie entière de t sur $[n-1, n]$

D'où : $\displaystyle L_N - I_N = \frac{1}{N}\left[\sum_{n=2}^{N}\int_{n-1}^{n}\big[t-(n-1)\big]\,f'(t)\,dt + f(1)\right]$

Mais : $\dfrac{f(1)}{N} \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$

et $\displaystyle\left|\int_{n-1}^{n}\big[t-(n-1)\big]\,f'(t)\,dt\right| \le \int_{n-1}^{n}|f'(t)|\,dt = 2\pi\int_{n-1}^{n}\frac{1}{t}\,dt$

car $f'(t) = 2i\pi\dfrac{f(t)}{t}$ et $|f(t)| = 1$ sur $[1, \infty[$

Puisque $\ln\Big(\dfrac{n}{n-1}\Big) \to 0$, avec la <u>moyenne de Cesaro</u> , on assure

que $\displaystyle\left|\int_{n-1}^{n}\big[t-(n-1)\big]\,f'(t)\,dt\right| \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$ donc : $\boxed{L_N - I_N \to 0 \text{ quand } N \to \infty}$

Ces deux résultats contredisent : $L_N \to 0$ quand $N \to \infty$

donc $\boxed{\text{la suite } A_1 = \big(\ln(n)\big)_{n\in\mathbb{N}} \text{ n'est pas équi-répartie modulo } I}$