Programme de colle – MPI

1. Polynômes et fractions rationnelles

Révision du programme de MP2I : voir programme officiel page suivante.

Extrait du programme officiel :

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Anneaux $\mathbb{K}[X]$	
Dans ce paragraphe, $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$.	
Idéaux de $\mathbb{K}[X]$.	
Définition du PGCD de $n \geqslant 2$ polynômes en termes d'idéaux, relation de Bézout.	Par convention, le PGCD est unitaire.
Irréductibles de $\mathbb{K}[X]$. Existence et unicité de la décomposition en facteurs irréductibles unitaires.	
Irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$.	La démonstration du théorème de d'Alembert-Gauss est hors programme. L'étude des irréductibles de $\mathbb{K}[X]$ pour un corps autre que $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ n'est pas un objectif du programme.

2. Groupe symétrique

Révision du programme de MP2I : voir programme officiel page suivante.
On s'intéresse en particulier aux orbites d'une permutation, à son ordre, au groupe alterné.

3. Déterminant

Révision du programme de MP2I : voir programme officiel page suivante.

Extrait du programme officiel :

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Compléments d'algèbre linéaire	
Transvections par blocs. Invariance du déterminant.	
Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs.	

Semaine prochaine : Réduction (sans polynôme annulateur).

4. Questions de cours

Les preuves marquées d'un astérisque ∗ *ne peuvent être posées qu'aux membres des trinômes 4 à 7 sauf Jérémy et Caroline.*

(i) $(\mathbb{K}[X],+,\times)$ est un anneau principal : détail de l'intégrité et de ses idéaux.

(ii) ∗ Les transpositions engendrent $\mathfrak{S}_n$: déduit de la décomposition en cycles à supports disjoints **et** preuve par récurrence.

(iii) ∗ Déterminant triangulaire par blocs (par le théorème fondamental).

(iv) Déterminant de Vandermonde (par les polynômes ou par opérations aux choix de l'étudiant).

(v) ∗ Formule de la comatrice.

(vi) Exercice classique : **Déterminant de Hürwitz**

Soit $a, b \in \mathbb{K}$ et $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$. On pose $D_n(a,b) = \begin{vmatrix} x_1 & a & \cdots & a \\ b & x_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ b & \cdots & b & x_n \end{vmatrix}$.

(a) Si $a \neq b$, on pose $\Delta(x)$ le déterminant obtenu en ajoutant x à chaque cœfficient de $D_n(a,b)$. Vérifier Δ est une fonction affine de x et en déduire $D_n(a,b)$.

(b) On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. En déduire $D_n(a,a) = \begin{vmatrix} x_1 & a & \cdots & a \\ a & x_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & \cdots & a & x_n \end{vmatrix}$.

(c) Pour $\mathbb{K}$ quelconque, retrouver l'expression de $D_n(a,a)$ en utilisant la multilinéarité du déterminant par rapport à ses colonnes.

(vii) **Exercices CCINP 59, 85, 87, 90**

5. Exercices CCINP

- **CCINP 59** : Soit n un entier naturel tel que $n \geqslant 2$.
Soit E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) de degré inférieur ou égal à n. On pose $\forall P \in E,\ f(P) = P - P'$.

  1. Démontrer que f est bijectif de deux manières :
     (a) sans utiliser de matrice de f,
     (b) en utilisant une matrice de f.
  2. Soit $Q \in E$. Trouver P tel que $f(P) = Q$.
     Indication : si $P \in E$, quel est le polynôme $P^{(n+1)}$?
  3. (5/2) f est-il diagonalisable ?

- **CCINP 85** :

  1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et $a \in \mathbb{R}$.
     (a) Donner sans démonstration, en utilisant la formule de Taylor, la décomposition de $P(X)$ dans la base $\left(1, X-a, (X-a)^2, \cdots, (X-a)^n\right)$.
     (b) Soit $r \in \mathbb{N}^*$. En déduire que :
     a est une racine de P d'ordre de multiplicité r si et seulement si $P^{(r)}(a) \neq 0$ et $\forall k \in [\![0, r-1]\!]$, $P^{(k)}(a) = 0$.
  2. Déterminer deux réels a et b pour que 1 soit racine double du polynôme $P = X^5 + aX^2 + bX$ et factoriser alors ce polynôme dans $\mathbb{R}[X]$.

- **CCINP 87** : Soient $a_0, a_1, \cdots, a_n$ $n+1$ réels deux à deux distincts.

  1. Montrer que si $b_0, b_1, \cdots, b_n$ sont $n+1$ réels quelconques, alors il existe un unique polynôme P vérifiant $\deg P \leqslant n$ et $\forall i \in \{0, \cdots, n\}$ $P(a_i) = b_i$.
  2. Soit $k \in [\![0, \dots, n]\!]$.
     Expliciter ce polynôme P, que l'on notera L_k, lorsque $\forall i \in [\![0, \dots, n]\!]$ $b_i = \begin{cases} 0 \text{ si } i \neq k \\ 1 \text{ si } i = k \end{cases}$
  3. Prouver que $\forall p \in [\![0, \dots, n]\!]$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k^p L_k = X^p$.

- **CCINP 90** : $\mathbb{K}$ désigne le corps des réels ou celui des complexes.
Soient a_1, a_2, a_3 trois scalaires distincts donnés de $\mathbb{K}$.

1. Montrer que $\Phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}^3 \\ P & \longmapsto & \big(P(a_1), P(a_2), P(a_3)\big) \end{array}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

2. On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{K}^3$ et on pose $\forall k \in \{1,2,3\}$, $L_k = \Phi^{-1}(e_k)$.
   (a) Justifier que (L_1, L_2, L_3) est une base de $\mathbb{K}_2[X]$.
   (b) Exprimer les polynômes L_1, L_2 et L_3 en fonction de a_1, a_2 et a_3.

3. Soit $P \in \mathbb{K}_2[X]$. Déterminer les coordonnées de P dans la base (L_1, L_2, L_3).

4. **Application** : on se place dans $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère orthonormé et on considère les trois points $A(0,1), B(1,3), C(2,1)$.
Déterminer une fonction polynomiale de degré 2 dont la courbe passe par les points A, B et C.

6. Programme de MP2I

A. Polynômes et fractions rationnelles

a) Anneau des polynômes à une indéterminée

Contenus	Capacités & commentaires
Anneau $\mathbb{K}[X]$. Degré, coefficient dominant, polynôme unitaire. Degré d'une somme, d'un produit. Composition.	La construction de $\mathbb{K}[X]$ est hors programme. Ensemble $\mathbb{K}_n[X]$ des polynômes de degré au plus n. L'anneau $\mathbb{K}[X]$ est intègre.

b) Divisibilité et division euclidienne

Contenus	Capacités & commentaires
Divisibilité dans $\mathbb{K}[X]$, diviseurs, multiples. Caractérisation des couples de polynômes associés.	
Théorème de la division euclidienne.	Algorithme de la division euclidienne.

c) Fonctions polynomiales et racines

Contenus	Capacités & commentaires
Fonction polynomiale associée à un polynôme. Racine (ou zéro) d'un polynôme, caractérisation en termes de divisibilité. Le nombre de racines d'un polynôme non nul est majoré par son degré. Multiplicité d'une racine.	Lien avec l'introduction aux équations algébriques de la section « Nombres complexes ». Méthode de Horner pour l'évaluation polynomiale. Détermination d'un polynôme par la fonction polynomiale associée.
Polynôme scindé. Relations entre coefficients et racines (formules de Viète).	Les formules concernant la somme et le produit doivent être connues des étudiants; les autres doivent être retrouvées rapidement.

d) Dérivation

Contenus	Capacités & commentaires
Dérivée formelle d'un polynôme.	Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, lien avec la dérivée de la fonction polynomiale associée.
Opérations sur les polynômes dérivés : combinaison linéaire, produit. Formule de Leibniz. Formule de Taylor polynomiale. Caractérisation de la multiplicité d'une racine par les polynômes dérivés successifs.	

e) Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$

Contenus	Capacités & commentaires
PGCD de deux polynômes dont l'un au moins est non nul. Algorithme d'Euclide.	Tout diviseur commun à A et B de degré maximal est appelé un PGCD de A et B. L'ensemble des diviseurs communs à A et B est égal à l'ensemble des diviseurs d'un de leurs PGCD. Tous les PGCD de A et B sont associés. Un seul est unitaire, on le note $A \wedge B$.
Relation de Bézout.	Détermination d'un couple de Bézout par l'algorithme d'Euclide étendu.
PPCM. Couple de polynômes premiers entre eux. Théorème de Bézout. Lemme de Gauss. PGCD d'un nombre fini de polynômes, relation de Bézout. Polynômes premiers entre eux dans leur ensemble, premiers entre eux deux à deux.	Notation $A \vee B$. Adaptation des résultats présentés lors de l'étude de l'arithmétique dans $\mathbb{Z}$.

f) Polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$

Contenus	Capacités & commentaires
Théorème de d'Alembert-Gauss. Polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$. Théorème de décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.	La démonstration est hors programme. Caractérisation de la divisibilité dans $\mathbb{C}[X]$ à l'aide des racines et des multiplicités. Deux polynômes de $\mathbb{C}[X]$ sont premiers entre eux si et seulement s'ils n'ont pas de racine commune. Factorisation de $X^n - 1$ dans $\mathbb{C}[X]$.
Polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$. Théorème de décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.	Deux racines complexes conjuguées d'un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ ont même multiplicité.

g) Formule d'interpolation de Lagrange

Contenus	Capacités & commentaires
Si $x_1, \ldots, x_n$ sont des éléments distincts de $\mathbb{K}$ et $y_1, \ldots, y_n$ des éléments de $\mathbb{K}$, il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que $P(x_i) = y_i$ pour tout i.	Expression de P. Description des polynômes Q tels que $Q(x_i) = y_i$ pour tout i.

h) Fractions rationnelles

Contenus	Capacités & commentaires
Corps $\mathbb{K}(X)$. Forme irréductible d'une fraction rationnelle. Fonction rationnelle. Degré, partie entière, zéros et pôles, multiplicités.	La construction de $\mathbb{K}(X)$ est hors programme.

i) Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$ et sur $\mathbb{R}$

Contenus	Capacités & commentaires
Existence et unicité de la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$ et sur $\mathbb{R}$.	La démonstration est hors programme. Toute technicité dans les exemples est exclue. Application au calcul de primitives, de dérivées k-ièmes.
Si λ est un pôle simple, coefficient de $\dfrac{1}{X-\lambda}$.	
Décomposition en éléments simples de $\dfrac{P'}{P}$.	

B. Groupe symétrique

Le groupe symétrique est introduit en vue de l'étude des déterminants, mais aussi pour son intérêt propre et ses interventions possibles dans diverses questions d'algèbre et de probabilités.

a) Généralités

Contenus	Capacités & commentaires
Groupe des permutations de l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$. Cycle, transposition.	Notation S_n. Notation $(a_1\ a_2\ \ldots\ a_p)$.

Contenus	Capacités & Commentaires
Décomposition d'une permutation en produit de cycles à supports disjoints : existence, unicité, commutativité.	La démonstration n'est pas exigible, mais les étudiants doivent savoir décomposer une permutation.

b) Signature d'une permutation

Décomposition d'une permutation en produit de transpositions.	
Signature : il existe un unique morphisme de groupes de S_n dans $\{-1,1\}$ envoyant toute transposition sur -1.	La démonstration n'est pas exigible.

C. Déterminants

Les objectifs de cette partie sont les suivants :

- ★ *introduire la notion de déterminant d'une famille de vecteurs, en motivant sa construction par la géométrie ;*
- ★ *établir les principales propriétés des déterminants des matrices carrées et des endomorphismes ;*
- ★ *indiquer quelques méthodes simples de calcul de déterminants.*

Contenus	Capacités & commentaires

a) Formes n-linéaires alternées

Forme n-linéaire alternée sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Antisymétrie, effet d'une permutation.	La définition est motivée par les notions intuitives d'aire et de volume algébriques, en s'appuyant sur des figures. Si f est une forme n-linéaire alternée et si $(x_1,\dots,x_n)$ est une famille liée, alors $f(x_1,\dots,x_n)=0$.

b) Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base

Si e est une base, il existe une unique forme n-linéaire alternée f pour laquelle $f(e)=1$; toute forme n-linéaire alternée est un multiple de $\det_e$.	Notation $\det_e$. La démonstration de l'existence n'est pas exigible.
Expression du déterminant dans une base en fonction des coordonnées.	Dans $\mathbb{R}^2$ (resp. $\mathbb{R}^3$), interprétation du déterminant dans la base canonique comme aire orientée (resp. volume orienté) d'un parallélogramme (resp. parallélépipède).
Comparaison, si e et e' sont deux bases, de $\det_e$ et $\det_{e'}$. La famille $(x_1,\dots,x_n)$ est une base si et seulement si $\det_e(x_1,\dots,x_n)\neq 0$.	

c) Déterminant d'un endomorphisme

Déterminant d'un endomorphisme.	
Déterminant d'une composée.	Caractérisation des automorphismes.

d) Déterminant d'une matrice carrée

Déterminant d'une matrice carrée.	Caractère n-linéaire alterné du déterminant par rapport aux colonnes.
Déterminant d'un produit.	Relation $\det(\lambda A)=\lambda^n \det(A)$.
Caractérisation des matrices inversibles. L'application $\det$ induit un morphisme de GL(E) (resp. GL$_n(\mathbb{K})$) sur $\mathbb{K}^*$.	
Déterminant d'une transposée.	Caractère n-linéaire alterné du déterminant par rapport aux lignes.

e) Calcul des déterminants

Contenus	Capacités & Commentaires
Effet des opérations élémentaires. Cofacteur. Développement par rapport à une ligne ou une colonne. Déterminant d'une matrice triangulaire.	
Déterminant de Vandermonde.	Lien avec les polynômes de Lagrange.

f) Comatrice

Comatrice.	Notation Com(A).
Relation $A\,\mathrm{Com}(A)^\top=\mathrm{Com}(A)^\top A=\det(A)I_n$.	Expression de l'inverse d'une matrice inversible.