

Groupe symétrique et déterminant [MP2I]

1 GROUPE SYMÉTRIQUE

1 Définition, structure

Définition 1 : Permutation, groupe symétrique

Si E est un ensemble, on appelle **permutation** de E toute bijection de E dans E . On note $\mathfrak{S}(E)$ leur ensemble.

Si $E = \llbracket 1, n \rrbracket$ où $n \in \mathbb{N}^*$, on note \mathfrak{S}_n appelé **groupe symétrique d'ordre n (ou de degré n)** cet ensemble.

Si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on note

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

Propriété 1 : Structure

(\mathfrak{S}_n, \circ) est un groupe d'ordre (ie de cardinal) $n!$, non abélien dès que $n \geq 3$.

Définition 2 : Orbites

Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. La relation binaire définie sur $\llbracket 1, n \rrbracket$ par

$$x \sim y \iff \exists k \in \mathbb{Z}, y = \sigma^k(x)$$

est une relation d'équivalence dont les classes d'équivalence sont les **orbites** de σ .

Si $x \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$\mathcal{O}(x) = \{ \sigma^k(x), k \in \mathbb{Z} \}.$$

Propriété 2 : Description d'une orbite

Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, $x \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Alors il existe $\ell \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{O}(x) = \{x, \sigma(x), \dots, \sigma^{\ell-1}(x)\}$ (deux à deux distincts).

Définition 3 : Support

Si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, son **support** est l'ensemble des éléments de $\llbracket 1, n \rrbracket$ qui **ne sont pas** invariants par σ .

Propriété 3 : Commutation de permutations à supports disjoints

Deux permutations à supports disjoints commutent.

2 Cycles

Définition 4 : Transposition, cycle

- Une **transposition** τ est une permutation qui échange deux éléments i et j de $\llbracket 1, n \rrbracket$, et laisse les autres invariants ie dont le support est $\{i, j\}$.

On la note $\tau = (i j)$ ou parfois $\tau_{i,j}$.

$$\tau_{i,j}(i) = j, \tau_{i,j}(j) = i \text{ et si } k \notin \{i, j\}, \tau_{i,j}(k) = k.$$

- Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $2 \leq p \leq n$.

On appelle **p -cycle** une permutation c de \mathfrak{S}_n qui permute circulairement p éléments i_1, i_2, \dots, i_p de $\llbracket 1, n \rrbracket$ et laisse les autres invariants ie dont le support est $\{i_1, \dots, i_p\}$ et telle que

$$c(i_1) = i_2; c(i_2) = i_3; \dots; c(i_{p-1}) = i_p; c(i_p) = i_1$$

p est la **longueur** du cycle c . On note $c = (i_1 i_2 \cdots i_p)$.

Propriété 4 : Ordre d'un cycle

Un p -cycle est d'ordre p .

Théorème 1 : Unique décomposition en produit de cycles à supports disjoints

Toute permutation se décompose en produit (composée) de cycles à supports disjoints. La décomposition est unique à l'ordre des facteurs près.

Corollaire 1 : Décomposition en produit de transpositions (non unique)

Toute permutation se décompose en produit (composée) de transpositions.

Voici deux propositions adaptables à tout cycle :

$$\begin{aligned} (1 \ 2 \ \cdots \ p) &= (1 \ p)(1 \ p-1) \cdots (1 \ 2) \\ &= (1 \ 2)(2 \ 3) \cdots (p-1 \ p) \end{aligned}$$



3 Signature

Définition 5 : Inversions, signature

Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. On appelle **inversion** par σ tout couple (i, j) tel que $i < j$ et $\sigma(i) > \sigma(j)$.

On note $I(\sigma)$ le nombre d'inversions par σ .

On appelle **signature** de σ le nombre $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{I(\sigma)} \in \{-1, 1\}$.

On vérifie que $\varepsilon(\sigma) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}$.

Une permutation σ est dite **paire** lorsque $I(\sigma)$ est pair et donc $\varepsilon(\sigma) = 1$. Elle est dite **impaire** dans le cas contraire.

Théorème 2 : Morphisme de signature

Soit $n \geq 2$. L'application

$$\varepsilon : \begin{cases} (\mathfrak{S}_n, \circ) & \longrightarrow (\{-1, 1\}, \times) = (\mathbb{U}_2, \times) \\ \sigma & \longmapsto \varepsilon(\sigma) \end{cases}$$

est un morphisme de groupe, ie si $\sigma, \sigma' \in \mathfrak{S}_n$, $\varepsilon(\sigma\sigma') = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma')$.

Propriété 5 : de la signature

(i) Si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ se décompose en produit de N transpositions, $\varepsilon(\sigma) = (-1)^N$.

En particulier, cette décomposition n'est pas unique mais la parité du nombre de termes est toujours celle de la permutation.

(ii) Si c est un p -cycle, $\varepsilon(c) = (-1)^{p-1}$.

(iii) Si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, $\varepsilon(\sigma^{-1}) = \varepsilon(\sigma)$.

4 Groupe alterné (HP)

Définition 6 : Groupe alterné

Le sous-groupe $\mathfrak{A}_n = \text{Ker}(\varepsilon)$ des permutations paires de \mathfrak{S}_n est appelé **groupe alterné d'ordre n (ou de degré n)**.

Propriété 6

Pour tout $n \geq 2$, $|\mathfrak{A}_n| = \frac{n!}{2}$.

II FORMES n -LINÉAIRES

Définition 7 : Application n -linéaire

Soit \mathbb{K} corps commutatif, $n \in \mathbb{N}^*$, E, F des \mathbb{K} -espaces vectoriels.

Une application $f : E^n \rightarrow F$ est dite **n -linéaire** lorsque pour tout $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) \in E^n$, et tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$f_i : \begin{cases} E & \longrightarrow F \\ \vec{x} & \longmapsto f(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{i-1}, \vec{x}, \vec{x}_{i+1}, \dots, \vec{x}_n) \end{cases}$$

est linéaire. (Linéarité par rapport à la i^{e} variable.) c'est-à-dire $\forall (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) \in E^n$, $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\forall \vec{x}, \vec{y} \in E$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned} f(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{i-1}, \vec{x} + \lambda \vec{y}, \vec{x}_{i+1}, \dots, \vec{x}_n) \\ = f(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{i-1}, \vec{x}, \vec{x}_{i+1}, \dots, \vec{x}_n) \\ + \lambda f(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{i-1}, \vec{y}, \vec{x}_{i+1}, \dots, \vec{x}_n) \end{aligned}$$

On note $\mathcal{L}_n(E, F)$ l'ensemble des formes n -linéaires.

Lorsque $F = \mathbb{K}$, on parle de **forme n -linéaire**.

Propriété 7 : Espace vectoriel de applications n -linéaires

$\mathcal{L}_n(E, F)$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel.

Définition 8 : Symétrie, antisymétrie et caractère alterné

Soit $f \in \mathcal{L}_n(E, \mathbb{K})$.

- f est dite **symétrique** si et seulement si $\forall (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) \in E^n$, $\forall i \neq j$,

$$\begin{aligned} f(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_i, \dots, \vec{x}_j, \dots, \vec{x}_n) \\ = f(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_j, \dots, \vec{x}_i, \dots, \vec{x}_n). \end{aligned}$$

- f est dite **antisymétrique** si et seulement si $\forall (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) \in E^n$, $\forall i \neq j$,

$$\begin{aligned} f(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_i, \dots, \vec{x}_j, \dots, \vec{x}_n) \\ = -f(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_j, \dots, \vec{x}_i, \dots, \vec{x}_n). \end{aligned}$$

- f est dite **alternée** si et seulement si $\forall (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) \in E^n$, $\forall i \neq j$,

$$f(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_i, \dots, \vec{x}_i, \dots, \vec{x}_n) = 0_{\mathbb{K}}.$$

Propriété 8 : Caractérisations

Soit $f \in \mathcal{L}_n(E, \mathbb{K})$.

(i) f est symétrique si et seulement si $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n, \forall (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) \in E^n,$

$$f(\vec{x}_{\sigma(1)}, \dots, \vec{x}_{\sigma(n)}) = f(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n).$$

(ii) f est antisymétrique si et seulement si $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n, \forall (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) \in E^n,$

$$f(\vec{x}_{\sigma(1)}, \dots, \vec{x}_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) f(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n).$$

(iii) f est alternée si et seulement si $\forall (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) \in E^n,$

$$(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) \text{ liée} \implies f(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) = 0_{\mathbb{K}}.$$

Propriété 9 : Équivalence entre alternée et anti-symétrique

Soit $f \in \mathcal{L}_n(E, \mathbb{K})$ une forme linéaire. Alors f est alternée si et seulement si f est antisymétrique.

Théorème 3 : fondamental

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie, $n = \dim E \in \mathbb{N}^*$.
 Si $n = \dim E$, l'ensemble des formes n -linéaires alternées sur E est un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension 1.

Propriété 10 : du déterminant

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie n , $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ des bases de E .

(i) **Formule de changement de base :**

$$\det_{\mathcal{B}'} = \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \det_{\mathcal{B}}.$$

(ii) $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \neq 0$ et $\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) = (\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}'))^{-1}$.

(iii) $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ est libre / une base de E si et seulement si $\det_{\mathcal{B}}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) \neq 0_{\mathbb{K}}$.

Propriété 11 : Interprétation géométrique

(i) Si $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$, \mathcal{B} la base canonique de \mathbb{R}^2 , alors $\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v})$ est l'aire orientée du parallélogramme construit sur \vec{u} et \vec{v} .

(ii) Si $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$, \mathcal{B} la base canonique de \mathbb{R}^3 , alors $\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est le volume orienté du parallépipède construit sur $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$.

On montre que si $u \in \mathcal{L}(E)$, alors $\det_{\mathcal{B}}(u(\mathcal{B}))$ ne dépend pas de \mathcal{B} . On en déduit la définition :

Définition 10 : Déterminant d'un endomorphisme

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On appelle **déterminant** de u le scalaire

$$\det u = \det_{\mathcal{B}}(u(\mathcal{B})) = \det_{(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)}(u(\vec{e}_1), \dots, u(\vec{e}_n))$$

où \mathcal{B} est une base quelconque de E .

Propriété 12 : du déterminant d'un endomorphisme

Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$.

(i) $\forall (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) \in E,$
 $\det_{\mathcal{B}}(u(\vec{x}_1), \dots, u(\vec{x}_n)) = \det u \times \det_{\mathcal{B}}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n).$

(ii) $\det(\text{id}_E) = 1.$

(iii) $\det(u \circ v) = \det u \times \det v.$

(iv) $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \det(\lambda u) = \lambda^n \det u.$

(v) $u \in \mathcal{GL}(E) \iff \det u \neq 0.$

(vi) $\det: (\mathcal{GL}(E), \circ) \rightarrow (\mathbb{K}^*, \times)$ est un morphisme de groupes.

(vii) Si $u \in \mathcal{GL}(E), \det(u^{-1}) = (\det u)^{-1}.$

III DÉTERMINANT

1 Définitions

On fixe E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie n , $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base de E .

Définition 9 : Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base

On appelle **déterminant dans la base \mathcal{B}** l'unique forme n -linéaire alternée sur E notée $\det_{\mathcal{B}}$ telle que $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1$.
 Si pour $1 \leq j \leq n, \vec{x}_j \in E$ de coordonnées $(x_{1,j}, \dots, x_{n,j})$ dans \mathcal{B} , alors

$$\det_{\mathcal{B}}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) x_{\sigma(1),1} \dots x_{\sigma(n),n}$$

On note

$$\det_{\mathcal{B}}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) = \begin{vmatrix} x_{1,1} & \dots & x_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n,1} & \dots & x_{n,n} \end{vmatrix}.$$

**Définition 11 : du déterminant d'une matrice carrée**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $A = (a_{i,j})_{i,j \in \llbracket 1,n \rrbracket}$. On définit le **déterminant** de A par

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} \dots a_{\sigma(n),n}.$$

Propriété 13 : du déterminant d'une matrice carrée

- (i) Si C_1, \dots, C_n sont les vecteurs colonnes de A et \mathcal{B} la base canonique de \mathbb{K}^n , $\det A = \det_{\mathcal{B}}(C_1, \dots, C_n)$.
- (ii) Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie n , $u \in \mathcal{L}(E)$ représenté par A dans une base de E , alors $\det A = \det u$.
- (iii) $\det I_n = 1$.
- (iv) Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\det AB = \det A \det B$.
- (v) \triangleleft Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$.
- (vi) $\det A^T = \det A$.
- (vii) $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \det A \neq 0\}$.
- (viii) $\det : (\mathcal{GL}_n(\mathbb{K}), \times) \rightarrow (\mathbb{K}^*, \times)$ est un morphisme de groupes.
- (ix) Si A est inversible, $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$.
- (x) Des matrices semblables ont même déterminant : le déterminant est un invariant de similitude.

2 Calculs**Propriété 14 : Opérations sur un déterminant**

- (i) Si une ligne ou une colonne est nulle, ou une combinaison linéaire des autres, le déterminant est nul.
- (ii) On ne change pas le déterminant avec les opérations

$$L_i \leftarrow L_i + \sum_{k \neq i} \lambda_k L_k \quad \text{ou} \quad C_j \leftarrow C_j + \sum_{k \neq j} \lambda_k C_k$$

(transvections successives.)

- (iii) En multipliant par λ une ligne ou une colonne, on multiplie par λ le déterminant.
- (iv) Si on échange deux lignes ou deux colonnes, on multiplie le déterminant par -1 . Plus généralement, si on permute les lignes ou les colonnes avec une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on multiplie le déterminant par $\varepsilon(\sigma)$.

- (v) Le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit de ses coefficients diagonaux.

Définition 12 : Mineurs, cofacteurs, comatrice

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

- On appelle **mineur** d'indice (i, j) le déterminant $\Delta_{i,j}$ obtenu en retirant L_i et C_j à A .
- On appelle **cofacteur** d'indice (i, j) le nombre $C_{i,j} = (-1)^{i+j} \Delta_{i,j}$.
- On appelle **comatrice** de A la matrice de ses cofacteurs :

$$\tilde{A} = \text{Com } A = (C_{i,j})_{i,j} = \left((-1)^{i+j} \Delta_{i,j} \right)_{i,j}.$$

Propriété 15 : Développement par rapport à une ligne ou une colonne

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- (i) **Développement par rapport à L_i** $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} \Delta_{i,j} a_{i,j}.$$
- (ii) **Développement par rapport à C_j** $\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$\det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} \Delta_{i,j} a_{i,j}.$$

Propriété 16 : Déterminant de matrice triangulaire par blocs

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, alors

$$\begin{vmatrix} A & (*) \\ (0) & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & (0) \\ (*) & B \end{vmatrix} = \det A \cdot \det B.$$

Propriété 17 : Déterminant de Vandermonde

Soient $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned} V(x_1, \dots, x_n) &= \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} \\ &= \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i). \end{aligned}$$

3 Formule de la comatrice

Propriété 18 : Formule de la comatrice

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors

$$A \times (\text{Com } A)^\top = (\text{Com } A)^\top \times A = \det(A) \cdot I_n.$$

Si, de plus, A est inversible, alors

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} (\text{Com } A)^\top.$$

4 Orientation d'un \mathbb{R} -espace vectoriel

Définition 13 : Avoir même orientation qu'une base

On dit qu'une base \mathcal{B} d'un \mathbb{R} -espace vectoriel a **même orientation** qu'une autre base \mathcal{B}' lorsque

$$\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \det\left(P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}\right) > 0.$$

Propriété 19 : Relation d'équivalence

C'est une relation d'équivalence avec exactement deux classes d'équivalences.

Définition 14 : Orientation d'un \mathbb{R} -espace vectoriel

Orienter un \mathbb{R} -espace vectoriel, c'est décider qu'une base est **directe**. Alors toutes les bases de même orientation sont dites directes.

Toutes les autres, qui ont même orientation entre elles, sont dites **indirectes**.

5 Formules de Cramer (HP)

Propriété 20 : Formules de Cramer (HP)

Soit (S) un système de Cramer, c'est-à-dire à n équations et n inconnues et de matrice $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$. On sait que $(S) : Ax = b$ admet une unique solution $x = (x_1 \dots x_n)^\top \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Soient C_1, \dots, C_n les colonnes de A . Alors pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$x_j = \frac{\det\left(C_1 \mid \dots \mid C_{j-1} \mid b \mid C_{j+1} \mid \dots \mid C_n\right)}{\det A}.$$