8

Groupe symétrique et déterminant [MP2I]

I Groupe symétrique

1 Définition, structure

Définition 1 : Permutation, groupe symétrique

Si E est un ensemble, on appelle **permutation** de E toute bijection de E dans E. On note $\mathfrak{S}(E)$ leur ensemble.

Si $E = [\![1, n]\!]$ où $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathfrak{S}_n$ appelé **groupe symétrique d'ordre n (ou de degré n)** cet ensemble.

Si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on note $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \cdots\cdots\cdots n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) \cdots\cdots \sigma(n) \end{pmatrix}$.

Remarque

R 1 – Attention ! $\mathfrak{S}_n$ n'est pas de cardinal n mais ...

R 2 – Comme $\mathfrak{S}_n$ est fini, toute permutation est d'ordre fini, divisant $n!$ (théorème de Lagrange).

Propriété 1 : Structure

$(\mathfrak{S}_n, \circ)$ est un groupe d'ordre (ie de cardinal) $n!$, non abélien dès que $n \geqslant 3$.

Définition 2 : Orbites

Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. La relation binaire définie sur $[\![1, n]\!]$ par

$$x \sim y \Longleftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z}, \quad y = \sigma^k(x)$$

est une relation d'équivalence dont les classes d'équivalence sont les **orbites** de σ.

Si $x \in [\![1, n]\!]$,

$$\mathcal{O}(x) = \left\{\sigma^k(x),\ k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Propriété 2 : Description d'une orbite

Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, $x \in [\![1, n]\!]$. Alors il existe $\ell \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{O}(x) = \left\{x, \sigma(x), \dots, \sigma^{\ell-1}(x)\right\}$ (deux à deux distincts).

Remarque

R 3 – $\ell \leqslant$ ordre(σ).

Définition 3 : Support

Si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, son **support** est l'ensemble des éléments de $[\![1, n]\!]$ qui **ne sont pas** invariants par σ.

Remarque

R 4 – C'est la réunion de toutes les orbites non réduites à un élément.

Propriété 3 : Commutation de permutations à supports disjoints

Deux permutations à supports disjoints commutent.

Exercice 1 : Centre de $\mathfrak{S}_n$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$, et $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ tel que $i \neq j$. Montrer que si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et $(i\ \ j)$ commutent, $\{i, j\}$ est stable par σ. La réciproque est-elle vraie ?
2. Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 3$ le centre de $\mathfrak{S}_n$, partie de $\mathfrak{S}_n$ des permutations commutant avec toutes les permutations de $\mathfrak{S}_n$ est $Z(\mathfrak{S}_n) = \left\{\mathrm{id}_{[\![1,n]\!]}\right\}$. Étudier le cas où $n = 2$.

2 Cycles

Définition 4 : Transposition, cycle

- Une **transposition** τ est une permutation qui échange deux éléments i et j de $[\![1,n]\!]$, et laisse les autres invariants ie dont le support est $\{i,j\}$.
  On la note $\tau=(i\ j)$ ou parfois $\tau_{i,j}$.
  $\tau_{i,j}(i)=j$, $\tau_{i,j}(j)=i$ et si $k\notin\{i,j\}$, $\tau_{i,j}(k)=k$.
- Soit $p\in\mathbb{N}$ tel que $2\leqslant p\leqslant n$.
  On appelle p**-cycle** une permutation c de $\mathfrak{S}_n$ qui permute circulairement p éléments $i_1,i_2,\dots,i_n$ de $[\![1,n]\!]$ et laisse les autres invariants ie dont le support est $\{i_1,\dots,i_p\}$ et telle que

$$c(i_1)=i_2\ ;\ c(i_2)=i_3\ ;\ \cdots\ ;\ c(i_{p-1})=i_p\ ;\ c(i_p)=i_1$$

p est la **longueur** du cycle c. On note $c=(i_1\ i_2\ \cdots\ i_p)$.

Exercice 2 : Conjugaison de cycle (souvent utile)

Si $\sigma\in\mathfrak{S}_n$ et c un cycle, décrire $\sigma\circ c\circ\sigma^{-1}$.

Propriété 4 : Ordre d'un cycle

Un p-cycle est d'ordre p.

Théorème 1 : Unique décomposition en produit de cycles à supports disjoints

Toute permutation se décompose en produit (composée) de cycles à supports disjoints. La décomposition est unique à l'ordre des facteurs près.

Remarque

R 5 – Donc les cycles de $\mathfrak{S}_n$ engendrent $\mathfrak{S}_n$.

Remarque

R 6 – Par commutativité des cycles à supports disjoints, on a facilement que si m est le ppcm des ordres des cycles, $\sigma^m=\mathrm{id}$. Voir TD : montrer que le ppcm est égal à l'ordre de σ.

Voir exercice du TD : 5

Corollaire 1 : Décomposition en produit de transpositions (non unique)

Toute permutation se décompose en produit (composée) de transpositions.

Remarque

R 7 – Donc les transpositions de $\mathfrak{S}_n$ engendrent $\mathfrak{S}_n$.

Démonstration

Se déduit du théorème précédent en sachant décomposer un cycle produit de transposition.

Voici deux propositions adaptables à tout cycle :

$$(1\quad 2\quad\cdots\quad p)\quad=\quad(1\quad p)\,(1\quad p-1)\cdots(1\quad 2)\quad=\quad(1\quad 2)\,(2\quad 3)\cdots(p-1\quad p)$$

Mais savoir le démontrer directement n'est pas inintéressant (technique utile dans d'autres contextes.) Par récurrence sur $n\geqslant 2$.

- **Initialisation** : pour $n=2$, $\mathfrak{S}_2=\{\mathrm{id},(1\ 2)\}$ avec $\mathrm{id}=(1\ 2)^2$.
- **Hérédité** : Supposons que, pour un $n\geqslant 2$, $\mathfrak{S}_n$ est engendré par ses transpositions (HR). Soit $\sigma\in\mathfrak{S}_{n+1}$; on veut écrire σ comme un produit de transpositions. On va discuter suivant $\sigma(n+1)$:
  - **1^er^ Cas** : Si $\sigma(n+1)=(n+1)$, alors $[\![1,n]\!]$ est stable par σ, et celle-ci induit une permutation $\sigma'\in\mathfrak{S}_n$ de $[\![1,n]\!]$,

$$\sigma':\left|\begin{array}{ccc}[\![1,n]\!] & \longrightarrow & [\![1,n]\!]\\ k & \longmapsto & \sigma(k)\end{array}\right..$$

Par (HR), on peut trouver des transpositions $\tau'_1,\tau'_2,\dots,\tau'_p\in\mathfrak{S}_n$ telles que $\sigma'=\tau'_1\tau'_2\cdots\tau'_p$.

On peut alors prolonger les τ'_i en des permutations τ_i de $[\![1,n+1]\!]$ en posant $\tau_i(n+1)=n+1$.

On obtient la décomposition en remarquant que σ et $\tau_1\tau_2\cdots\tau_p$ coïncident sur $[\![1,n]\!]$ par définition des τ_i' et en $n+1$ qui est laissé invariant par toutes ces permutations. Donc

$$\sigma=\tau_1\tau_2\cdots\tau_p.$$

- **2e Cas** : Si $\sigma(n+1)\neq(n+1)$,

■ **La récurrence est établie.** Remarquons qu'à chaque étape, on ajoute au plus une transposition.

3 Signature

Définition 5 : Inversions, signature

Soit $\sigma\in\mathfrak{S}_n$. On appelle **inversion** par σ tout couple (i,j) tel que $i<j$ et $\sigma(i)>\sigma(j)$.
On note $I(\sigma)$ le nombre d'inversions par σ.
On appelle **signature** de σ le nombre $\varepsilon(\sigma)=(-1)^{I(\sigma)}\in\{-1,1\}$.
On vérifie que $\varepsilon(\sigma)=\displaystyle\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}\frac{\sigma(j)-\sigma(i)}{j-i}$.
Une permutation σ est dite **paire** lorsque $I(\sigma)$ est pair et donc $\varepsilon(\sigma)=1$. Elle est dite **impaire** dans le cas contraire.

Remarque

R 8 – La définition avec les inversions peut être oubliée tout de suite. Ce n'est pas ce qui importe dans la signature : il vaut mieux savoir se ramener à des cycles ou à des transpositions (voir ci-après).

Théorème 2 : Morphisme de signature

Soit $n\geqslant 2$. L'application

$$\varepsilon:\left|\begin{array}{ccc}(\mathfrak{S}_n,\circ) & \longrightarrow & (\{-1,1\},\times)=(\mathbb{U}_2,\times)\\ \sigma & \longmapsto & \varepsilon(\sigma)\end{array}\right.$$

est un morphisme de groupe, ie si $\sigma,\sigma'\in\mathfrak{S}_n$, $\varepsilon(\sigma\sigma')=\varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma')$.

Propriété 5 : de la signature

(i) *Si $\sigma\in\mathfrak{S}_n$ se décompose en produit de N transpositions, $\varepsilon(\sigma)=(-1)^N$.*
En particulier, cette décomposition n'est pas unique mais la parité du nombre de termes est toujours celle de la permutation.

(ii) *Si c est un p-cycle, $\varepsilon(c)=$.*

(iii) *Si $\sigma\in\mathfrak{S}_n$, $\varepsilon\left(\sigma^{-1}\right)=\varepsilon(\sigma)$.*

Voir exercice du TD : 4, 6

Exercice 3

Montrer que si $\sigma\in\mathfrak{S}_n$ et si p est le nombre d'orbites de σ, alors $\varepsilon(\sigma)=(-1)^{n-p}$.

4 Groupe alterné (HP)

Définition 6 : Groupe alterné

Le sous-groupe $\mathfrak{A}_n=\mathrm{Ker}(\varepsilon)$ des permutations paires de $\mathfrak{S}_n$ est appelé ***groupe alterné d'ordre n* (*ou de degré* n).**

Propriété 6

Pour tout $n\geqslant 2$, $|\mathfrak{A}_n|=\dfrac{n!}{2}$.

Remarque

R 9 – Il y a donc autant de permutations paires que de permutations impaires dans $\mathfrak{S}_n$.

Exemple

E 1 – Décrivons $\mathfrak{S}_4$: il contient

et $\mathfrak{A}_4$: il contient

Soit $G = \{\mathrm{id}, \sigma_1 = (1\ 2)\circ(3\ 4), \sigma_2 = (1\ 3)\circ(2\ 4), \sigma_3 = (1\ 4)\circ(2\ 3)\}$.

Il s'agit d'un sous-groupe commutatif de $\mathfrak{A}_4$ comme l'atteste sa table ci-contre, appelé groupe de Klein[1].

On peut montrer qu'il est isomorphe à $(\mathbb{U}_2^2, \times)$ et que tout groupe d'ordre 4 est soit isomorphe au groupe de Klein, soit isomorphe à $(\mathbb{U}_4, \times)$ (en examinant les différentes tables possibles pour la loi de groupe.)

$\circ$	id	σ_1	σ_2	σ_3
id	id	σ_1	σ_2	σ_3
σ_1	σ_1	id	σ_3	σ_2
σ_2	σ_2	σ_3	id	σ_1
σ_3	σ_3	σ_2	σ_1	id

Remarque

R 10 – On peut facilement trouver des sous-groupes de $\mathfrak{A}_4$ d'ordre 1, 2, 3, 4, et 12 mais il n'y a pas de sous-groupe d'ordre 6. On peut démontrer que ceux-ci sont soit cycliques (mais $\mathfrak{S}_4$ ne contient pas d'élément d'ordre 6), soit isomorphes au groupe diédral D_6 des isométries laissant invariant un triangle équilatéral (contenant 3 rotations et 3 symétries, engendré par une des rotations et une des symétries).
Par contre, on en trouve dans $\mathfrak{S}_4$ engendrés par un 3-cycle et une transposition facilement isomorphe à D_6 (qui est aussi isomorphe à $\mathfrak{S}_3$, par ailleurs !).

Voir exercice du TD : 8

II Formes n-linéaires

Définition 7 : Application n-linéaire

Soit $\mathbb{K}$ corps commutatif, $n \in \mathbb{N}^*$, E, F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
Une application $f : E^n \to F$ est dite **n-linéaire** lorsque pour tout $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) \in E^n$, et tout $i \in [\![1, n]\!]$,

$$f_i : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ \vec{x} & \longmapsto & f(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{i-1}, \vec{x}, \vec{x}_{i+1}, \dots, \vec{x}_n) \end{array} \right.$$

est linéaire. (Linéarité par rapport à la i^{e} variable.) c'est-à-dire $\forall (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) \in E^n, \quad \forall i \in [\![1, n]\!], \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in E, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned} f(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{i-1}, \vec{x} + \lambda \vec{y}, \vec{x}_{i+1}, \dots, \vec{x}_n) &\\ = f(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{i-1}, \vec{x}, \vec{x}_{i+1}, \dots, \vec{x}_n) &\\ + \lambda f(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{i-1}, \vec{y}, \vec{x}_{i+1}, \dots, \vec{x}_n) & \end{aligned}$$

On note $\mathcal{L}_n(E, F)$ l'ensemble des formes n-linéaires.
Lorsque $F = \mathbb{K}$, on parle de **forme n-linéaire**.

Propriété 7 : Espace vectoriel de applications n-linéaires

$\mathcal{L}_n(E, F)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Définition 8 : Symétrie, antisymétrie et caractère alterné

Soit $f \in \mathcal{L}_n(E, \mathbb{K})$.

- f est dite **symétrique** si et seulement si $\forall (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) \in E^n, \quad \forall i \neq j$,

- f est dite **antisymétrique** si et seulement si $\forall (\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n)\in E^n,\ \ \forall i\neq j,$

- f est dite **alternée** si et seulement si $\forall (\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n)\in E^n,\ \ \forall i\neq j,$

Propriété 8 : Caractérisations

Soit $f\in\mathscr{L}_n(E,\mathbb{K})$.

(i) *f est symétrique si et seulement si $\forall\sigma\in\mathfrak{S}_n,\ \ \forall(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n)\in E^n,$*

(ii) *f est antisymétrique si et seulement si $\forall\sigma\in\mathfrak{S}_n,\ \ \forall(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n)\in E^n,$*

(iii) *f est alternée si et seulement si $\forall(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n)\in E^n,$*

Propriété 9 : Équivalence entre alternée et antisymétrique

Soit $f\in\mathscr{L}_n(E,\mathbb{K})$ une forme linéaire. Alors f est alternée si et seulement si f est antisymétrique.

Remarque

R 11 – Le sens réciproque n'est en réalité vrai que lorsque $\mathbb{K}$ n'est pas de caractéristique 2, c'est-à-dire lorsque $2_{\mathbb{K}}\neq 0_{\mathbb{K}}$.

Théorème 3 : fondamental

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $n=\dim E\in\mathbb{N}^*$.
Si $n=\dim E$, l'ensemble des formes n-linéaires alternées sur E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 1.

Démonstration

L'ensemble $\Lambda_n(E)$ des formes n-linéaires alternées sur E est facilement un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}_n(E,\mathbb{K})$.

Soient $f\in\Lambda_n(E)$, $\mathscr{B}=(\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n)$ une base de E. On a déjà vu que si on note $(x_{1,j},\dots,x_{n,j})$ les coordonnées de $\vec{x}_j\in E$ dans la base $\mathscr{B}$, donc $\vec{x}_j=\sum_{i=1}^{n}x_{i,j}\vec{e}_i$, alors

$$f(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n)=f\left(\sum_{i_1=1}^{n}x_{i_1,1}\vec{e}_{i_1},\dots,\sum_{i_n=1}^{n}x_{i_n,n}\vec{e}_{i_n}\right)=\sum_{1\leqslant i_1,\dots,i_n\leqslant n}x_{i_1,1}\dots x_{i_n,n}f(\vec{e}_{i_1},\dots,\vec{e}_{i_n})$$

mais comme ici f est alternée, on peut indexer la somme par $1\leqslant i_1,\dots,i_n\leqslant n$ deux à deux distincts, ce qui revient à prendre une permutation $\sigma\in\mathfrak{S}_n$ telle que pour tout j, $i_j=\sigma(j)$. On obtient alors

$$f(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n)=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}x_{\sigma(1),1}\dots x_{\sigma(n),n}f(\vec{e}_{\sigma(1)},\dots,\vec{e}_{\sigma(n)})$$

Comme f est aussi antisymétrique,

$$f(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n)=\left(\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\varepsilon(\sigma)x_{\sigma(1),1}\dots x_{\sigma(n),n}\right)f(\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n)$$

On pose $d:\begin{array}{|ccc} E^n & \longrightarrow & \mathbb{K}\\ (\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\varepsilon(\sigma)x_{\sigma(1),1}\dots x_{\sigma(n),n}\end{array}$

On a que pour tout $f\in\Lambda_n(E)$, $f=f(\mathscr{B})\cdot d$ et donc $\Lambda_n(E)\subset\operatorname{Vect}d$.
Montrons que $d\in\Lambda_n(E)$.

- La n-linéarité vient de la linéarité l'application qui à un vecteur x associe sa i^{e} coordonnées dans $\mathscr{B}$.
- Pour montrer qu'elle est alternée, on montre qu'elle est antisymétrique :

$$d(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_j,\dots,\vec{x}_i,\dots,\vec{x}_n)=-d(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_i,\dots,\vec{x}_j,\dots,\vec{x}_n)$$

avec le changement d'indice $\sigma'=\sigma\circ(i\ j)$.

Donc $\Lambda_n(E)=\operatorname{Vect}d$.
Dernier point : $d\neq 0$: il suffit de vérifier que $d(\mathscr{B})=1$. ■

Remarque

R 12 – Deux formes n-linéaires alternées sur E de dimension n (oui, c'est bien le même n les deux fois) sont donc toujours proportionnelles, c'est ce qui importe.
Plus précisément, une base $\mathscr{B}$ de E étant donnée, il existe une unique forme n-linéaire alternée envoyant $\mathscr{B}$ sur le scalaire 1. On va l'appeler déterminant dans la base $\mathscr{B}$,

noté $\det_{\mathscr{B}}$, et toute forme n-linéaire alternée sur E est proportionnelle à $\det_{\mathscr{B}}$.

Voir exercice du TD : 11

III Déterminant

1 Définitions

On fixe E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, $\mathscr{B}=(\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n)$ une base de E.

Définition 9 : Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base

On appelle **déterminant dans la base** $\mathscr{B}$ l'unique forme n-linéaire alternée sur E notée $\det_{\mathscr{B}}$ telle que $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B})=1$.

Si pour $1\leqslant j\leqslant n$, $\vec{x}_j\in E$ de coordonnées $(x_{1,j},\dots,x_{n,j})$ dans $\mathscr{B}$, alors

$$\det_{\mathscr{B}}(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n)=$$

On note

$$\det_{\mathscr{B}}(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n)=\begin{vmatrix} x_{1,1} & \cdots & x_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n,1} & \cdots & x_{n,n}\end{vmatrix}.$$

Remarque

R 13 – Par définition, le déterminant est n-linéaire alterné. En particulier, le déterminant d'une famille liée est nul.

Propriété 10 : du déterminant

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, $\mathscr{B},\mathscr{B}'$ des bases de E.

(i) ***Formule de changement de base*** :

(ii) $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')\neq 0$ *et* $\det_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B})=$

(iii) $(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n)$ *est libre/une base de E si et seulement si* $\det_{\mathscr{B}}(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n)\neq 0_{\mathbb{K}}$.

Propriété 11 : Interprétation géométrique

(i) *Si $\vec{u},\vec{v}\in\mathbb{R}^2$, $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$, alors $\det_{\mathscr{B}}(\vec{u},\vec{v})$ est l'aire orientée du parallélogramme construit sur $\vec{u}$ et $\vec{v}$.*

(ii) *Si $\vec{u},\vec{v},\vec{w}\in\mathbb{R}^2$, $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, alors $\det_{\mathscr{B}}(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est le volume orienté du parallélogramme construit sur $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$.*

On montre que si $u\in\mathscr{L}(E)$, alors $\det_{\mathscr{B}}(u(\mathscr{B}))$ ne dépend pas de $\mathscr{B}$. On en déduit la définition :

Définition 10 : Déterminant d'un endomorphisme

Soit $u\in\mathscr{L}(E)$. On appelle **déterminant** de u le scalaire

$$\det u=\det_{\mathscr{B}}(u(\mathscr{B}))=\det_{(\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n)}(u(\vec{e}_1),\dots,u(\vec{e}_n))$$

où $\mathscr{B}$ est une base quelconque de E.

Propriété 12 : du déterminant d'un endomorphisme

Soient $u,v\in\mathscr{L}(E)$.

(i) $\forall(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n)\in E$,
$\det_{\mathscr{B}}(u(\vec{x}_1),\dots,u(\vec{x}_n))=$

(ii) $\det(\mathrm{id}_E)=1$.

(iii) $\det(u\circ v)=\det u\times\det v$.

(iv) ⚠ $\forall\lambda\in\mathbb{K}$, , $\det(\lambda u)=$

(v) $u\in\mathscr{GL}(E)\iff\det u\neq 0$.

(vi) $\det:(\mathscr{GL}(E),\circ)\to(\mathbb{K}^*,\times)$ *est un morphisme de groupes.*

(vii) *Si* $u\in\mathscr{GL}(E)$, $\det\left(u^{-1}\right)=(\det u)^{-1}$.

Remarque

R 14 – ⚠ det n'est pas linéaire : $\det(u+v) \neq \det u + \det v$ en général.

Exercice 4

On note $\mathscr{S}L(E)$ (pour spécial linéaire) l'ensemble des endomorphismes de E de déterminant 1. Montrer qu'il a une structure de groupe.

Voir exercice du TD : 15

Définition 11 : du déterminant d'une matrice carrée

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $A = (a_{i,j})_{i,j \in [\![1,n]\!]}$. On définit le **déterminant** de A par

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} =$$

Remarque

R 15 – Dans chaque terme de la somme, on choisit exactement un terme par colonne et par ligne.

R 16 – Un définition alternative équivalente consisterait à faire agir la permutation sur le numéro de colonne : c'est l'égalité avec le déterminant de la transposée de la propriété suivante :

$$\det A = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{1,\sigma(1)} \dots a_{n,\sigma(n)}.$$

Propriété 13 : du déterminant d'une matrice carrée

(i) *Si $C_1, \dots, C_n$ sont les vecteurs colonnes de A et $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$,* $\det A = \det_{\mathscr{B}}(C_1, \dots, C_n)$.

(ii) *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, $u \in \mathscr{L}(E)$ représenté par A dans une base de E, alors $\det A = \det u$.*

(iii) $\det I_n = 1$.

(iv) *Si $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$,* $\det AB = \det A \det B$.

(v) ⚠ *Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,* $\det(\lambda A) = \lambda^{\boldsymbol{n}} \det A$.

(vi) $\det A^\top = \det A$.

(vii) $\mathscr{GL}_n(\mathbb{K}) = \{A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}),\ \det A \neq 0\}$.

(viii) $\det : (\mathscr{GL}_n(\mathbb{K}), \times) \to (\mathbb{K}^*, \times)$ *est un morphisme de groupes.*

(ix) *Si A est inversible,* $\det\left(A^{-1}\right) = (\det A)^{-1}$.

(x) *Des matrices semblables ont même déterminant : le déterminant est un invariant de similitude.*

Remarque

R 17 – ⚠ $\det(A+B) \neq \det A + \det B$ en général : det n'est pas linéaire.

Exercice 5

On note $\mathscr{S}L_n(\mathbb{K})$ (pour spécial linéaire) l'ensemble des matrices de déterminant 1. Montrer qu'il a une structure de groupe.

2 Calculs

Propriété 14 : Opérations sur un déterminant

(i) *Si une ligne ou une colonne est nulle, ou une combinaison linéaire des autres, le déterminant est nul.*

(ii) *On ne change pas le déterminant avec les opérations*

$$L_i \leftarrow L_i + \sum_{k \neq i} \lambda_k L_k \quad \text{ou} \quad C_j \leftarrow C_j + \sum_{k \neq i} \lambda_k C_k$$

(transvections successives.)

(iii) *En multipliant par λ une ligne ou une colonne, on multiplie par λ le déterminant.*

(iv) *Si on échange deux lignes ou deux colonnes, on multiplie le déterminant par -1. Plus généralement, si on permute les lignes ou les colonnes avec une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on multiplie le déterminant par $\varepsilon(\sigma)$.*

(v) *Le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit de ses cœfficients diagonaux.*

Définition 12 : Mineurs, cofacteurs, comatrice

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $i, j \in [\![1, n]\!]$.

- On appelle **mineur** d'indice (i, j) le déterminant $\Delta_{i,j}$ obtenu en retirant L_i et C_j à A.
- On appelle **cofacteur** d'indice (i, j) le nombre $C_{i,j} = (-1)^{i+j}\Delta_{i,j}$.
- On appelle **comatrice** de A la matrice de ses cofacteurs :

Propriété 15 : Développement par rapport à une ligne ou une colonne

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

(i) ***Développement par rapport à** L_i $\forall\, i \in [\![1, n]\!]$,*

(ii) ***Développement par rapport à** C_j $\forall\, j \in [\![1, n]\!]$,*

Propriété 16 : Déterminant de matrice triangulaire par blocs

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, alors

$$\begin{vmatrix} A & (*) \\ (0) & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & (0) \\ (*) & B \end{vmatrix} = \det A \cdot \det B.$$

Remarque

R 18 – ⚠ même lorsque toutes les matrices sont carrées, $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} \neq \det A \det D - \det B \det C$ ou autre $\det(AD - BC)$ en général !

R 19 – Les opérations sur les déterminants peuvent aussi être effectuées par blocs.

Propriété 17 : Déterminant de Vandermonde

Soient $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$,

$$V(x_1, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$=$$

Remarque

R 20 – $V(x_1, \ldots, x_n) \neq 0$ si et seulement si les x_i sont deux à deux distincts.

R 21 – Dans le problème d'interpolation de Lagrange, les cœfficients du polynôme inconnu $P = a_0 + \cdots + a_n X^n$ tel que pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, $P(x_i) = y_i$ sont solutions d'un système linéaire de matrice de Vandermonde associée à $x_0, \ldots, x_n$. Il y a bien une et une seule solution si les x_i dont deux à deux distincts.

Voir exercice du TD : 9, 10, 12 à 14

3 Formule de la comatrice

Propriété 18 : Formule de la comatrice

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors

Si, de plus, A est inversible, alors

Remarque

R 22 – Intérêt théorique. Utile en pratique seulement si $n = 2$ ou 3.

Voir exercice du TD : 17

4 Orientation d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel

Définition 13 : Avoir même orientation qu'une base

On dit qu'une base $\mathscr{B}$ d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel **a même orientation** qu'une autre base $\mathscr{B}'$ lorsque

Remarque

R 23 – ⚠ Cela n'a aucun sens dans $\mathbb{C}$!

Propriété 19 : Relation d'équivalence

C'est une relation d'équivalence avec exactement deux classes d'équivalences.

Définition 14 : Orientation d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel

Orienter un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, c'est décider qu'une base est **directe**. Alors toutes les bases de même orientation sont dites directes.

Toutes les autres, qui ont même orientation entre elles, sont dites **indirectes**.

5 Formules de Cramer (HP)

Propriété 20 : Formules de Cramer (HP)

Soit (S) un système de Cramer, c'est-à-dire à n équations et n inconnues et de matrice $A \in \mathscr{GL}_n(\mathbb{K})$. On sait que $(S) : Ax = b$ admet une unique solution $x = (x_1 \ \dots \ x_n)^\top \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Soient $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de A. Alors pour tout $j \in [\![1, n]\!]$,

Remarque

R 24 – De nouveau, un intérêt surtout théorique !

Exercice 6

Résoudre $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ ax + by + cz = d \\ a^2x + b^2y + c^2z = d^2 \end{cases}$ **lorsqu'il s'agit d'un système de Cramer.**