Groupe symétrique et déterminant [MP2I]

I Groupe symétrique

1 Définition, structure

Définition 1 : Permutation, groupe symétrique

Si E est un ensemble, on appelle **permutation** de E toute bijection de E dans E. On note $\mathfrak{S}(E)$ leur ensemble.

Si $E = [\![1, n]\!]$ où $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathfrak{S}_n$ appelé **groupe symétrique d'ordre n (ou de degré n)** cet ensemble.

Si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on note $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \cdots\cdots\cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) \cdots\cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$.

Remarque

R 1 – Attention ! $\mathfrak{S}_n$ n'est pas de cardinal n mais ... n! (!)

R 2 – Comme $\mathfrak{S}_n$ est fini, toute permutation est d'ordre fini, divisant $n!$ (théorème de Lagrange).

Propriété 1 : Structure

$(\mathfrak{S}_n, \circ)$ est un groupe d'ordre (ie de cardinal) $n!$, non abélien dès que $n \geqslant 3$.

Définition 2 : Orbites

Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. La relation binaire définie sur $[\![1, n]\!]$ par

$$x \sim y \iff \exists k \in \mathbb{Z}, \quad y = \sigma^k(x)$$

est une relation d'équivalence dont les classes d'équivalence sont les **orbites** de σ.

Si $x \in [\![1, n]\!]$,

$$\mathcal{O}(x) = \left\{\sigma^k(x), \ k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Propriété 2 : Description d'une orbite

Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, $x \in [\![1, n]\!]$. Alors il existe $\ell \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{O}(x) = \left\{x, \sigma(x), \ldots, \sigma^{\ell-1}(x)\right\}$ (deux à deux distincts).

Remarque

R 3 – $\ell \leqslant$ ordre(σ).

Définition 3 : Support

Si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, son **support** est l'ensemble des éléments de $[\![1, n]\!]$ qui **ne sont pas** invariants par σ.

Remarque

R 4 – C'est la réunion de toutes les orbites non réduites à un élément.

Propriété 3 : Commutation de permutations à supports disjoints

Deux permutations à supports disjoints commutent.

Exercice 1 : Centre de $\mathfrak{S}_n$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$, et $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ tel que $i \neq j$. Montrer que si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et $(i \ \ j)$ commutent, $\{i, j\}$ est stable par σ. La réciproque est-elle vraie ?
2. Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 3$ le centre de $\mathfrak{S}_n$, partie de $\mathfrak{S}_n$ des permutations commutant avec toutes les permutations de $\mathfrak{S}_n$ est $Z(\mathfrak{S}_n) = \left\{\mathrm{id}_{[\![1,n]\!]}\right\}$. Étudier le cas où $n = 2$.

2 Cycles

Définition 4 : Transposition, cycle

- Une **transposition** τ est une permutation qui échange deux éléments i et j de $[\![1, n]\!]$, et laisse les autres invariants ie dont le support est $\{i, j\}$.
  On la note $\tau = (i\ j)$ ou parfois $\tau_{i,j}$.
  $\tau_{i,j}(i) = j$, $\tau_{i,j}(j) = i$ et si $k \notin \{i, j\}$, $\tau_{i,j}(k) = k$.
- Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $2 \leqslant p \leqslant n$.
  On appelle **p-cycle** une permutation c de $\mathfrak{S}_n$ qui permute circulairement p éléments $i_1, i_2, \dots, i_p$ de $[\![1, n]\!]$ et laisse les autres invariants ie dont le support est $\{i_1, \dots, i_p\}$ et telle que

$$c(i_1) = i_2\ ;\ c(i_2) = i_3\ ;\ \cdots\ ;\ c(i_{p-1}) = i_p\ ;\ c(i_p) = i_1$$

p est la **longueur** du cycle c. On note $c = (i_1\ i_2\ \cdots\ i_p)$.

Les orbites d'un cycle sont toutes des singletons sauf une égale au support.

Exercice 2 : Conjugaison de cycle (souvent utile)

Si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et c un cycle, décrire $\sigma \circ c \circ \sigma^{-1}$.

Propriété 4 : Ordre d'un cycle

Un p-cycle est d'ordre p.

Théorème 1 : Unique décomposition en produit de cycles à supports disjoints

Toute permutation se décompose en produit (composée) de cycles à supports disjoints. La décomposition est unique à l'ordre des facteurs près.

Remarque

R5 – Donc les cycles de $\mathfrak{S}_n$ engendrent $\mathfrak{S}_n$.

Remarque

R6 – Par commutativité des cycles à supports disjoints, on a facilement que si m est le ppcm des ordres des cycles, $\sigma^m = \mathrm{id}$. Voir TD : montrer que le ppcm est égal à l'ordre de σ.

Voir exercice du TD : 5

Corollaire 1 : Décomposition en produit de transpositions (non unique)

Toute permutation se décompose en produit (composée) de transpositions.

Remarque

R7 – Donc les transpositions de $\mathfrak{S}_n$ engendrent $\mathfrak{S}_n$.

Démonstration

Se déduit du théorème précédent en sachant décomposer un cycle produit de transposition.

Voici deux propositions adaptables à tout cycle :

$$(1\quad 2\quad \cdots\quad p) \quad = \quad (1\quad p)\ (1\quad p-1)\ \cdots\ (1\quad 2) \quad = \quad (1\quad 2)\ (2\quad 3)\ \cdots\ (p-1\quad p)$$

Mais savoir le démontrer directement n'est pas inintéressant (technique utile dans d'autres contextes.) Par récurrence sur $n \geqslant 2$.

- **Initialisation** : pour $n = 2$, $\mathfrak{S}_2 = \{\mathrm{id}, (1\ 2)\}$ avec $\mathrm{id} = (1\ 2)^2$.
- **Hérédité** : Supposons que, pour un $n \geqslant 2$, $\mathfrak{S}_n$ est engendré par ses transpositions (HR). Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_{n+1}$; on veut écrire σ comme un produit de transpositions. On va discuter suivant $\sigma(n+1)$:
  - **1er Cas** : Si $\sigma(n+1) = (n+1)$, alors $[\![1, n]\!]$ est stable par σ, et celle-ci induit une permutation $\sigma' \in \mathfrak{S}_n$ de $[\![1, n]\!]$,

$$\sigma' : \left| \begin{array}{ccc} [\![1, n]\!] & \longrightarrow & [\![1, n]\!] \\ k & \longmapsto & \sigma(k) \end{array} \right. .$$

Par (HR), on peut trouver des transpositions $\tau'_1, \tau'_2, \dots, \tau'_p \in \mathfrak{S}_n$ telles que $\sigma' = \tau'_1 \tau'_2 \cdots \tau'_p$.

On peut alors prolonger les τ'_i en des permutations τ_i de $[\![1, n+1]\!]$ en posant $\tau_i(n+1) = n+1$.

On obtient la décomposition en remarquant que σ et $\tau_1\tau_2\cdots\tau_p$ coïncident sur $[\![1,n]\!]$ par définition des τ'_i et en $n+1$ qui est laissé invariant par toutes ces permutations. Donc

$$\sigma = \tau_1\tau_2\cdots\tau_p.$$

⋆ **2ème Cas** : Si $\sigma(n+1) \neq (n+1)$,

$\rho = (n+1\ \ \sigma(n+1)) \circ \sigma \in \mathfrak{S}_{n+1}$: $\rho(n+1) = n+1$

avec le cas précédent, on a $\tau_1, .., \tau_p$ transposi° de $\mathfrak{S}_{n+1}$

tel que $\rho = (n+1\ \ \sigma(n+1))\,\sigma = \tau_1 \circ \dots \circ \tau_p$

alors $\sigma = (n+1\ \ \sigma(n+1)) \circ \tau_1 \circ \dots \circ \tau_p$

■ **La récurrence est établie.** Remarquons qu'à chaque étape, on ajoute au plus une transposition.

Voir exercice du TD : 4, 6

3 Signature

Définition 5 : Inversions, signature

Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. On appelle **inversion** par σ tout couple (i,j) tel que $i<j$ et $\sigma(i) > \sigma(j)$.
On note $I(\sigma)$ le nombre d'inversions par σ.
On appelle **signature** de σ le nombre $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{I(\sigma)} \in \{-1,1\}$.
On vérifie que $\varepsilon(\sigma) = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} \dfrac{\sigma(j)-\sigma(i)}{j-i}$.

Une permutation σ est dite **paire** lorsque $I(\sigma)$ est pair et donc $\varepsilon(\sigma)=1$. Elle est dite **impaire** dans le cas contraire.

Remarque

R 8 – La définition avec les inversions peut être oubliée tout de suite. Ce n'est pas ce qui importe dans la signature : il vaut mieux savoir se ramener à des cycles ou à des transpositions (voir ci-après).

Théorème 2 : Morphisme de signature

Soit $n \geqslant 2$. L'application

$$\varepsilon : \left|\begin{array}{ccc} (\mathfrak{S}_n, \circ) & \longrightarrow & (\{-1,1\},\times) = (\mathbb{U}_2,\times) \\ \sigma & \longmapsto & \varepsilon(\sigma) \end{array}\right.$$

est un morphisme de groupe, ie si $\sigma,\sigma' \in \mathfrak{S}_n$, $\varepsilon(\sigma\sigma') = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma')$.

Propriété 5 : de la signature

(i) *Si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ se décompose en produit de N transpositions, $\varepsilon(\sigma) = (-1)^N$.*
En particulier, cette décomposition n'est pas unique mais la parité du nombre de termes est toujours celle de la permutation.

(ii) *Si c est un p-cycle, $\varepsilon(c) =$* $(-1)^{p-1}$

(iii) *Si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, $\varepsilon(\sigma^{-1}) = \varepsilon(\sigma)$.*

$\varepsilon(\sigma^{-1}) \overset{\text{mdg}}{=} (\underbrace{\varepsilon(\sigma)}_{=\pm 1})^{-1} = \varepsilon(\sigma)$

Voir exercice du TD : 4, 6

Exercice 3

Montrer que si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et si p est le nombre d'orbites de σ, alors $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{n-p}$.

4 Groupe alterné (HP)

Définition 6 : Groupe alterné

Le sous-groupe $\mathfrak{A}_n = \mathrm{Ker}(\varepsilon)$ des permutations paires de $\mathfrak{S}_n$ est appelé ***groupe alterné d'ordre n* (*ou de degré* n).**

Propriété 6

Pour tout $n \geqslant 2$, $|\mathfrak{A}_n| = \dfrac{n!}{2}$.

Remarque

R 9 – Il y a donc autant de permutations paires que de permutations impaires dans $\mathfrak{S}_n$.

$\binom{4}{2} = \frac{4\times 3}{2} = 6$ transposi°. $4 \times 2! = 8$ 3-cycles $1\times 3! = 6$ 4-cycles.

Exemple

E 1 – Décrivons $\mathfrak{S}_4$: il contient $4! = 24$ permutations

$\mathfrak{S}_4 = \{ \mathrm{id}, (1\,2), (1\,3), (1\,4), (2\,3), (2\,4), (3\,4), (1\,2\,3), (1\,3\,2), (1\,2\,4), (1\,4\,2), (1\,3\,4), (1\,4\,3), (2\,3\,4), (2\,4\,3), (1\,2\,3\,4), (1\,2\,4\,3), (1\,3\,2\,4), (1\,3\,4\,2), (1\,4\,3\,2), (1\,4\,2\,3), (1\,2)\circ(3\,4), (1\,3)\circ(2\,4), (1\,4)\circ(2\,3) \}$

et $\mathfrak{A}_4$: il contient $\frac{4!}{2} = 12$ permuta°.

$\mathfrak{A}_4 = \{ \mathrm{id}, (1\,2\,3), (1\,3\,2), (1\,2\,4), (1\,4\,2), (1\,3\,4), (1\,4\,3), (2\,3\,4), (2\,4\,3), \underbrace{(1\,2)\circ(3\,4)}_{=\sigma_1}, \underbrace{(1\,3)\circ(2\,4)}_{=\sigma_2}, \underbrace{(1\,4)\circ(2\,3)}_{=\sigma_3} \}$

Soit $G = \{\mathrm{id}, \sigma_1 = (1\,2)\circ(3\,4), \sigma_2 = (1\,3)\circ(2\,4), \sigma_3 = (1\,4)\circ(2\,3)\}$.

Il s'agit d'un sous-groupe commutatif de $\mathfrak{A}_4$ comme l'atteste sa table ci-contre, appelé groupe de Klein[1].

On peut montrer qu'il est isomorphe à $(\mathbb{U}_2^2, \times)$ et que tout groupe d'ordre 4 est soit isomorphe au groupe de Klein, soit isomorphe à $(\mathbb{U}_4, \times)$ (en examinant les différentes tables possibles pour la loi de groupe.)

$\circ$	id	σ_1	σ_2	σ_3
id	id	σ_1	σ_2	σ_3
σ_1	σ_1	id	σ_3	σ_2
σ_2	σ_2	σ_3	id	σ_1
σ_3	σ_3	σ_2	σ_1	id

Remarque

R 10 – On peut facilement trouver des sous-groupes de $\mathfrak{A}_4$ d'ordre 1, 2, 3, 4, et 12 mais il n'y a pas de sous-groupe d'ordre 6. On peut démontrer que ceux-ci sont soit cycliques (mais $\mathfrak{S}_4$ ne contient pas d'élément d'ordre 6), soit isomorphes au groupe diédral D_6 des isométries laissant invariant un triangle équilatéral (contenant 3 rotations et 3 symétries, engendré par une des rotations et une des symétries).

Par contre, on en trouve dans $\mathfrak{S}_4$ engendrés par un 3-cycle et une transposition facilement isomorphe à D_6 (qui est aussi isomorphe à $\mathfrak{S}_3$, par ailleurs !).

Voir exercice du TD : 8

4 Formes n-linéaires

Définition 7 : Application n-linéaire

Soit $\mathbb{K}$ corps commutatif, $n \in \mathbb{N}^*$, E, F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

Une application $f : E^n \to F$ est dite **n-linéaire** lorsque pour tout $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) \in E^n$, et tout $i \in [\![1, n]\!]$,

$$f_i : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ \vec{x} & \longmapsto & f(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{i-1}, \vec{x}, \vec{x}_{i+1}, \dots, \vec{x}_n) \end{array} \right.$$

est linéaire. (Linéarité par rapport à la i^{e} variable.) c'est-à-dire $\forall (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) \in E^n$, $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\forall \vec{x}, \vec{y} \in E$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned} f(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{i-1}, \vec{x} + \lambda \vec{y}, \vec{x}_{i+1}, \dots, \vec{x}_n) &= f(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{i-1}, \vec{x}, \vec{x}_{i+1}, \dots, \vec{x}_n) \\ &\quad + \lambda f(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{i-1}, \vec{y}, \vec{x}_{i+1}, \dots, \vec{x}_n) \end{aligned}$$

On note $\mathscr{L}_n(E, F)$ l'ensemble des ~~formes~~ applications n-linéaires.

Lorsque $F = \mathbb{K}$, on parle de **forme n-linéaire**.

Propriété 7 : Espace vectoriel de applications n-linéaires

$\mathscr{L}_n(E, F)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Définition 8 : Symétrie, antisymétrie et caractère alterné

Soit $f \in \mathscr{L}_n(E, \mathbb{K})$.

- f est dite **symétrique** si et seulement si $\forall (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) \in E^n$, $\forall i \neq j$,

$$f(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_i, \dots, \vec{x}_j, \dots, \vec{x}_n) = f(\vec{x}_1, \dots, \underset{i^e}{\vec{x}_j}, \dots, \underset{j^e}{\vec{x}_i}, \dots, \vec{x}_n)$$

- f est dite **antisymétrique** si et seulement si $\forall(\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_n)\in E^n,\quad \forall i\neq j,$

$$f(\vec{x_1},\ldots,\vec{x_i},\ldots,\vec{x_j},\ldots,\vec{x_n}) = -f(\vec{x_1},\ldots,\vec{x_j},\ldots,\vec{x_i},\ldots,\vec{x_n})$$

- f est dite **alternée** si et seulement si $\forall(\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_n)\in E^n,\quad \forall i\neq j,$

$$\vec{x_i}=\vec{x_j} \Rightarrow f(\vec{x_1},\ldots,\vec{x_n}) = 0_{\mathbb{K}}$$

Propriété 8 : Caractérisations

Soit $f\in\mathscr{L}_n(E,\mathbb{K})$.

(i) *f est symétrique si et seulement si $\forall\sigma\in\mathfrak{S}_n,\quad\forall(\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_n)\in E^n,$*

$$f(\vec{x_{\sigma(1)}},\ldots,\vec{x_{\sigma(n)}}) = f(\vec{x_1},\ldots,\vec{x_n})$$

(ii) *f est antisymétrique si et seulement si $\forall\sigma\in\mathfrak{S}_n,\quad\forall(\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_n)\in E^n,$*

$$f(\vec{x_{\sigma(1)}},\ldots,\vec{x_{\sigma(n)}}) = \varepsilon(\sigma)\, f(\vec{x_1},\ldots,\vec{x_n})$$

(iii) *f est alternée si et seulement si $\forall(\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_n)\in E^n,$*

$$(\vec{x_1},\ldots,\vec{x_n}) \text{ liée} \Rightarrow f(\vec{x_1},\ldots,\vec{x_n}) = 0_{\mathbb{K}}$$

Idée : les transposi° engendrent $\mathfrak{S}_n$.

Propriété 9 : Équivalence entre alternée et antisymétrique

Soit $f\in\mathscr{L}_n(E,\mathbb{K})$ une forme linéaire. Alors f est alternée si et seulement si f est antisymétrique.

Remarque

R 11 – Le sens réciproque est vraie car $\mathbb{K}$ n'est pas de caractéristique 2, c'est-à-dire si $2_{\mathbb{K}}\neq 0_{\mathbb{K}}$.

$\mathbb{K} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

Théorème 3 : fondamental

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $n=\dim E\in\mathbb{N}^*$.

Si $n=\dim E$, l'ensemble des formes n-linéaires alternées sur E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 1.

Démonstration notation maison

L'ensemble $\Lambda_n(E)$ des formes n-linéaires alternées sur E est facilement un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}_n(E,\mathbb{K})$.

Soient $f\in\Lambda_n(E)$, $\mathscr{B}=(\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n)$ une base de E. On a ~~déjà vu~~ que si on note $(x_{1,j},\ldots,x_{n,j})$ les coordonnées de $\vec{x}_j\in E$ dans la base $\mathscr{B}$, donc $\vec{x}_j=\sum_{i=1}^{n} x_{i,j}\vec{e}_i$, alors

$$f(\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_n) = f\left(\sum_{i_1=1}^{n} x_{i_1,1}\vec{e}_{i_1},\ldots,\sum_{i_n=1}^{n} x_{i_n,n}\vec{e}_{i_n}\right) = \sum_{1\leqslant i_1,\ldots,i_n\leqslant n} x_{i_1,1}\ldots x_{i_n,n} f(\vec{e}_{i_1},\ldots,\vec{e}_{i_n})$$

mais comme ici f est alternée, on peut indexer la somme par $1\leqslant i_1,\ldots,i_n\leqslant n$ deux à deux distincts, ce qui revient à prendre une permutation $\sigma\in\mathfrak{S}_n$ telle que pour tout j, $i_j=\sigma(j)$. On obtient alors

$$f(\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_n) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} x_{\sigma(1),1}\ldots x_{\sigma(n),n} f(\vec{e}_{\sigma(1)},\ldots,\vec{e}_{\sigma(n)})$$

Comme f est aussi antisymétrique,

$$f(\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_n) = \left(\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) x_{\sigma(1),1}\ldots x_{\sigma(n),n}\right) f(\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n)$$

On pose $d:\left|\begin{array}{ccc} E^n & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_n) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) x_{\sigma(1),1}\ldots x_{\sigma(n),n} \end{array}\right.$

On a que pour tout $f\in\Lambda_n(E)$, $f=f(\mathscr{B})\cdot d$ et donc $\Lambda_n(E)\subset\operatorname{Vect} d$.

Montrons que $d\in\Lambda_n(E)$.

- La n-linéarité vient de la linéarité l'application qui à un vecteur x associe sa i^{e} coordonnées dans $\mathscr{B}$.
- Pour montrer qu'elle est alternée, on montre qu'elle est antisymétrique :

$$d(\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_j,\ldots,\vec{x}_i,\ldots,\vec{x}_n) = -d(\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_i,\ldots,\vec{x}_j,\ldots,\vec{x}_n)$$

avec le changement d'indice $\sigma'=\sigma\circ(i\ j)$.

Donc $\Lambda_n(E)=\operatorname{Vect} d$.

Dernier point : $d\neq 0$: il suffit de vérifier que $d(\mathscr{B})=1$. ■

Remarque

R 12 – Deux formes n-linéaires alternées sur E de dimension n (oui, c'est bien le même n les deux fois) sont donc toujours proportionnelles, c'est ce qui importe.

Plus précisément, une base $\mathscr{B}$ de E étant donnée, il existe une unique forme n-linéaire alternée envoyant $\mathscr{B}$ sur le scalaire 1. On va l'appeler déterminant dans la base $\mathscr{B}$, noté $\det_{\mathscr{B}}$, et toute forme n-linéaire alternée sur E est proportionnelle à $\det_{\mathscr{B}}$.

Voir exercice du TD : 11

5 Déterminant

a Définitions

On fixe E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, $\mathscr{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base de E.

Définition 9 : Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base

On appelle **déterminant dans la base** $\mathscr{B}$ l'unique forme n-linéaire alternée sur E notée $\det_{\mathscr{B}}$ telle que $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}) = 1$.

Si pour $1 \leqslant j \leqslant n$, $\vec{x}_j \in E$ de coordonnées $(x_{1,j}, \dots, x_{n,j})$ dans $\mathscr{B}$, alors

$$\det_{\mathscr{B}}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma)\, x_{\sigma(1),1} \cdots x_{\sigma(n),n}$$

On note

$$\det_{\mathscr{B}}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) = \begin{vmatrix} x_{1,1} & \dots & x_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n,1} & \dots & x_{n,n} \end{vmatrix}.$$

On prend un coeff dans chaque colonne jamais sur la même ligne

Remarque

R 13 – Par définition, le déterminant est n-linéaire alterné. En particulier, le déterminant d'une famille liée est nul.

Propriété 10 : du déterminant

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, $\mathscr{B}, \mathscr{B}'$ des bases de E.

(i) ***Formule de changement de base*** :

$$\det_{\mathscr{B}'} = \det_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B}) \cdot \det_{\mathscr{B}}$$

(ii) $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') \neq 0$ *et* $\det_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B}) = \left(\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')\right)^{-1}$

(iii) $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ *est libre/une base de E si et seulement si* $\det_{\mathscr{B}}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) \neq 0_{\mathbb{K}}$.

$1 = \det_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B}') = \det_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B}) \times \det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')$

Propriété 11 : Interprétation géométrique

(i) *Si $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$, $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$, alors $\det_{\mathscr{B}}(\vec{u}, \vec{v})$ est l'aire orientée du parallélogramme construit sur $\vec{u}$ et $\vec{v}$.*

(ii) *Si $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^2$, $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, alors $\det_{\mathscr{B}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est le volume orienté du parallélogramme construit sur $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$.*

On montre que si $u \in \mathscr{L}(E)$, alors $\det_{\mathscr{B}}(u(\mathscr{B}))$ ne dépend pas de $\mathscr{B}$. On en déduit la définition :

Définition 10 : Déterminant d'un endomorphisme

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. On appelle **déterminant** de u le scalaire

$$\det u = \det_{\mathscr{B}}(u(\mathscr{B})) = \det_{(\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n)}(u(\vec{e}_1), \dots, u(\vec{e}_n))$$

où $\mathscr{B}$ est une base quelconque de E.

Propriété 12 : du déterminant d'un endomorphisme

Soient $u, v \in \mathscr{L}(E)$, $n = \dim E$.

(i) $\forall (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) \in E$,
$\det_{\mathscr{B}}(u(\vec{x}_1), \dots, u(\vec{x}_n)) = \det u \times \det_{\mathscr{B}}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ (formule de factorisation)

(ii) $\det(\mathrm{id}_E) = 1$.

(iii) $\det(u \circ v) = \det u \times \det v$.

(iv) ⚠ $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\det(\lambda u) = \lambda^n \det u$

(v) $u \in \mathscr{GL}(E) \iff \det u \neq 0$.

(vi) $\det : (\mathscr{GL}(E), \circ) \to (\mathbb{K}^*, \times)$ *est un morphisme de groupes.*

(vii) *Si $u \in \mathscr{GL}(E)$,* $\det(u^{-1}) = (\det u)^{-1}$.

Remarque

R 14 – ⚠ $\det$ n'est pas linéaire : $\det(u+v) \neq \det u + \det v$ en général.

Exercice 4

On note $\mathscr{S}L(E)$ (pour spécial linéaire) l'ensemble des endomorphismes de E de déterminant 1. Montrer qu'il a une structure de groupe.

Voir exercice du TD : 15

Définition 11 : du déterminant d'une matrice carrée

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $A = (a_{i,j})_{i,j \in [\![1,n]\!]}$. On définit le **déterminant** de A par

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n}$$

Remarque

R 15 – Dans chaque terme de la somme, on choisit exactement un terme par colonne et par ligne.

R 16 – Un définition alternative équivalente consisterait à faire agir la permutation sur le numéro de colonne : c'est l'égalité avec le déterminant de la transposée de la propriété suivante :

$$\det A = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{1,\sigma(1)} \ldots a_{n,\sigma(n)}.$$

Propriété 13 : du déterminant d'une matrice carrée

(i) *Si $C_1, \ldots, C_n$ sont les vecteurs colonnes de A et $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$, $\det A = \det_{\mathscr{B}}(C_1, \ldots, C_n)$.*

(ii) *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, $u \in \mathscr{L}(E)$ représenté par A dans une base de E, alors $\det A = \det u$.*

(iii) $\det I_n = 1$.

(iv) *Si $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\det AB = \det A \det B$.*

(v) ⚠ *Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $\det(\lambda A) = \lambda^{n} \det A$.*

(vi) $\det A^\top = \det A$.

(vii) $\mathscr{GL}_n(\mathbb{K}) = \{A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \mid \det A \neq 0\}$.

(viii) $\det : (\mathscr{GL}_n(\mathbb{K}), \times) \to (\mathbb{K}^*, \times)$ *est un morphisme de groupes.*

(ix) *Si A est inversible, $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$.*

(x) *Des matrices semblables ont même déterminant : le déterminant est un invariant de similitude.*

Remarque

R 17 – ⚠ $\det(A+B) \neq \det A + \det B$ en général : $\det$ n'est pas linéaire.

Exercice 5

On note $\mathscr{S}L_n(\mathbb{K})$ (pour spécial linéaire) l'ensemble des matrices de déterminant 1. Montrer qu'il a une structure de groupe.

b Calculs

Propriété 14 : Opérations sur un déterminant

(i) *Si une ligne ou une colonne est nulle, ou une combinaison linéaire des autres, le déterminant est nul.* (car altéré % aux lignes / colonnes)

(ii) *On ne change pas le déterminant avec les opérations*

$$L_i \leftarrow L_i + \sum_{k \neq i} \lambda_k L_k \quad \text{ou} \quad C_j \leftarrow C_j + \sum_{k \neq i} \lambda_k C_k$$

(n linéarité + altéré)

(transvections successives.)

(iii) *En multipliant par λ une ligne ou une colonne, on multiplie par λ le déterminant.* (n linéarité)

(iv) *Si on échange deux lignes ou deux colonnes, on multiplie le déterminant par -1. Plus généralement, si on permute les lignes ou les colonnes avec une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on multiplie le déterminant par $\varepsilon(\sigma)$.* (anti symétrie)

(v) *Le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit de ses cœfficients diagonaux.*

Définition 12 : Mineurs, cofacteurs, comatrice

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $i, j \in [\![1, n]\!]$.

- On appelle **mineur** d'indice (i, j) le déterminant $\Delta_{i,j}$ obtenu en retirant L_i et C_j à A.
- On appelle **cofacteur** d'indice (i, j) le nombre $C_{i,j} = (-1)^{i+j}\Delta_{i,j}$.
- On appelle **comatrice** de A la matrice de ses cofacteurs :

$$\mathrm{Com} A = (C_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} = \left((-1)^{i+j}\Delta_{i,j}\right)_{1\leq i,j\leq n}$$

Propriété 15 : Développement par rapport à une ligne ou une colonne

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

(*i*) ***Développement par rapport à*** L_i $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j}\Delta_{i,j}$

(*ii*) ***Développement par rapport à*** C_j $\forall j \in [\![1, n]\!]$, $\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j}\Delta_{i,j}$

Propriété 16 : Déterminant de matrice triangulaire par blocs

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *et* $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, *alors*

$$\begin{vmatrix} A & (*) \\ (0) & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & (0) \\ (*) & B \end{vmatrix} = \det A \cdot \det B.$$

Remarque

R 18 – ⚠ même lorsque toutes les matrices sont carrées, $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} \neq \det A \det D - \det B \det C$ ou autre $\det(AD - BC)$ en général !

Propriété 17 : Déterminant de Vandermonde

Soient $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$,

$$V(x_1, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= \prod_{1\leq i<j\leq n} (x_j - x_i)$$

Remarque

R 19 – $V(x_1, \ldots, x_n) \neq 0$ si et seulement si les x_i sont deux à deux distincts.

+ lien avec Lagrange

Voir exercice du TD : 9, 10, 12 à 14

C Formule de la comatrice

Propriété 18 : Formule de la comatrice

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. *Alors*

$$A \times (\mathrm{Com} A)^T = (\mathrm{Com} A)^T \times A = (\det A) I_n.$$

Si, de plus, A *est inversible, alors*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}(\mathrm{Com} A)^T$$

Remarque

R 20 – Intérêt théorique. Utile en pratique seulement si $n = 2$ ou 3.

Voir exercice du TD : 17

d Orientation d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel

Définition 13 : Avoir même orientation qu'une base

On dit qu'une base $\mathscr{B}$ d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel **a même orientation** qu'une autre base $\mathscr{B}'$ lorsque

$$\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \det P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} > 0$$

Remarque

R 21 – ⚠ Cela n'a aucun sens dans $\mathbb{C}$!

Propriété 19 : Relation d'équivalence

C'est une relation d'équivalence avec exactement deux classes d'équivalences.

Définition 14 : Orientation d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel

Orienter un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, c'est décider qu'une base est **directe**. Alors toutes les bases de même orientation sont dites directes.

Toutes les autres, qui ont même orientation entre elles, sont dites **indirectes**.

e Formules de Cramer (HP)

Propriété 20 : Formules de Cramer (HP)

Soit (S) un système de Cramer, c'est-à-dire à n équations et n inconnues et de matrice $A \in \mathscr{GL}_n(\mathbb{K})$. On sait que $(S) : Ax = b$ admet une unique solution $x = (x_1 \dots x_n)^\top \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Soient $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de A. Alors pour tout $j \in [\![1, n]\!]$,

$$x_j = \frac{\left| C_1 \,\vdots \cdots \vdots\, \underset{j^e}{b} \,\vdots \cdots \vdots\, C_n \right|}{\det A}$$

Remarque

R 22 – De nouveau, un intérêt surtout théorique !

Exercice 6

Résoudre $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ ax + by + cz = d \\ a^2x + b^2y + c^2z = d^2 \end{cases}$ lorsqu'il s'agit d'un système de Cramer.