

# Mathématiques 1

## Présentation du sujet

Ce problème d'algèbre contient trois parties largement indépendantes.

Dans la première partie, le sujet introduit le produit de convolution sur l'ensemble des fonctions arithmétiques (c'est-à-dire de  $\mathbb{N}^*$  dans  $\mathbb{C}$ ). On obtient ainsi, avec l'addition usuelle, une structure d'anneau. Celle-ci permet de retrouver des résultats classiques sur la fonction de Möbius et l'indicatrice d'Euler. On termine avec trois questions d'analyse sur les séries de Dirichlet, en particulier leur lien avec le produit de convolution.

La partie II s'intéresse aux matrices et endomorphismes de permutation en mêlant des arguments d'algèbre linéaire et d'arithmétique.

Ces deux premières parties ont un poids comparable dans le barème et représentent ensemble plus de trois quarts du total des points.

En utilisant quelques résultats du I, la partie III conduit à une expression du polynôme caractéristique de la matrice de Redheffer. En particulier, on obtient la multiplicité de 1 en tant que valeur propre de cette matrice.

## Analyse globale des résultats

Les parties I et II (jusqu'à la question 30 environ) sont abordées dans quasiment toutes les copies. Par contre, en raison de la longueur du sujet, la partie III n'a été significativement traitée que dans quelques copies.

Dans un certain nombre de copies, les candidats se contentent d'affirmations gratuites sans aucune justification précise. C'est particulièrement vrai dans la sous-partie II.A.

De même, il n'est pas suffisant de citer le nom d'un théorème pour pouvoir l'utiliser. Le jury attend bien évidemment la vérification de toutes ses hypothèses.

## Commentaires sur les réponses apportées et conseils aux futurs candidats

### I Quelques résultats utiles

Les réponses apportées aux premières questions manquent très souvent de rigueur et de précision pour justifier les égalités entre sommes. Ces approximations conduisent à des expressions incohérentes (égalités entre parties de  $\mathbb{N}^2$  et de  $\mathbb{N}^3$  par exemple). Pour les questions 3 et 4, des successions d'égalités sans argumentation ne peuvent être suffisantes.

On note de grosses lacunes sur les structures algébriques. Les axiomes des structures algébriques sont rarement tous présents. Ici également, le jury attend des arguments précis : «  $(M, *)$  est un groupe » n'est évidemment pas suffisant quand le titre de la sous-partie est « Groupe des fonctions multiplicatives ».

Dans la question 7, on voit plusieurs fois des tentatives d'utilisation de noyau (alors qu'il n'y a aucune structure sur les ensembles en question) et des raisonnements faux en arithmétique comme, par exemple : si  $d$  divise  $nm$  alors, comme  $m$  et  $n$  sont premiers entre eux,  $d$  divise  $m$  ou  $d$  divise  $n$ .

Les questions 12 et 13, qui constituent des exercices classiques d'arithmétique, ont été assez souvent traitées correctement, mais en dehors de l'esprit du sujet qui demandait de travailler dans l'anneau  $(A, +, *)$  ce qui permettait d'obtenir une réponse plus rapide.

La fin de la partie I sur les séries de Dirichlet a rarement été réussie. Dans la question 17, il y a beaucoup de confusions entre minimum et borne inférieure. Dans les deux suivantes, beaucoup de candidats ont vainement tenté d'utiliser un produit de Cauchy ou un vague résultat d'identification. On a très rarement vu le théorème de sommation par paquets correctement utilisé pour la question 19.

## II Matrices et endomorphismes de permutation

Dans cette partie également, on note des manques de précision et de rigueur.

Dans la question 20, la réduction de  $\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$  à un seul terme est en général assez floue : dans la discussion, il y a confusion entre un terme de la somme et la somme complète.

Pour la question 21 (et la suivante) le comportement de  $\rho$  en dehors du support de  $\gamma_1$  est rarement explicité.

La question 24 (polynôme caractéristique d'une matrice compagnon dans un cas particulier) est souvent traitée mais le calcul devait être très précis (puissance de  $-1$  lors des développements en particulier) pour rapporter tous les points.

Au fur et à mesure que l'on avance dans cette partie, les questions sont de moins en moins abordées bien que certaines soient indépendantes du reste et parfois plus simples que les précédentes.

## III Valeurs propres de la matrice de Redheffer

Comme indiqué précédemment, cette partie est rarement abordée. Les tentatives dans la question 36 ont généralement été peu fructueuses.

## Conclusion

Devant un sujet long comme celui-ci, il est inutile de vouloir traiter énormément de questions si cela se fait au détriment de la précision et de la rigueur des raisonnements. Il est tout à fait possible d'obtenir une bonne note en répondant correctement aux questions de la première partie.

En grande partie, ce sujet porte sur l'arithmétique. Le jury est satisfait de constater que des candidats sont capables de mener des raisonnements de qualité sur ce domaine. Malheureusement, ce n'est pas le cas dans la majorité des copies. Le jury encourage les futurs candidats à ne négliger aucune partie du programme.

Le jury ne peut que conseiller aux futurs candidats de soigner leur argumentation, leur rédaction ainsi que leur présentation de copies. Se contenter de recopier la question ou répondre « c'est évident » ne rapporte évidemment pas de point. S'il y a une question (d'autant plus si celle-ci est « montrer que... », le jury attend une justification.