TD ∗ d'Algèbre Linéaire

1 **Mines** Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Quels sont les endomorphismes de E qui ont la même matrice dans toutes les bases de E ?

2 **Centrale** Soit E un espace vectoriel de dimension finie, f et g dans $\mathscr{L}(E)$.
Montrer que $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Im} g$ si et seulement s'il existe h dans $\mathscr{L}(E)$ tel que $f = g \circ h$.

3 **ENS-Centrale-Mines** Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Résoudre l'équation $X + X^{\intercal} = (\operatorname{tr} X)A$. d'inconnue $X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

4 **ENS** Soit A, B, C trois matrices de $\mathscr{M}_n\mathbb{K})$.
Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe $X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $C = AXB$.

On pourra traduire l'énoncé en termes d'endomorphismes.

5 **Centrale-Mines** Soit $V = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ AMA = 0\}$ avec $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de rang r.
Montrer que V est un espace vectoriel. Quelle est sa dimension ?

Raisonner avec des endomorphismes, ou alors utiliser les matrices J_r.

6 Combien y-a-t-il de matrices inversibles dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ où p est premier ?

7 **X-ENS-Centrale** Démontrer que deux sous-espaces vectoriels d'un espace de dimension finie sont de même dimension si et seulement s'ils admettent un supplémentaire commun.

Variante Montrer que si deux sous-espaces admettent un supplémentaire commun, ils sont isomorphes, et que la réciproque est vraie en dimension finie et fausse en général.

On pourra commencer par examiner le cas où ces deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires, puis se ramener à ce cas-là, ou alors considérer un sous-espace en somme directe de dimension maximale.

8 **X-Centrale** En caractérisant les formes linéaires de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, montrer que tout hyperplan de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ contient une matrice inversible.

9 **X** Montrer que l'ensemble des suites complexes périodiques est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, en donner une base.

10 **ENS** Déterminer les matrices $A \in \mathscr{GL}_n(\mathbb{C})$ telles que A et A^{-1} soient dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}^+)$.