1. Suites de fonctions

1 Preuve du théorème de Weierstraß par les polynômes de Bernstein

Soit f continue sur $[0,1]$ à valeurs réelles. On définie les fonctions polynômes de Bernstein associées à f, pour tout $n \in \mathbb{N}$, définie sur $[0,1]$, par $B_n(f) : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}$.

1. Calculer $B_n(u)$ où $u : x \mapsto 1$, $B_n(\mathrm{id})$, $B_n(v)$ où $v : x \mapsto x^2$.
2. Soit $\varepsilon > 0$.
   (a) Justifier l'existence de $\eta > 0$ tel si $x, x' \in [0,1]$, $|x - x'| \leqslant \eta \Longrightarrow |f(x) - f(x')| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.

   Pour $x \in [0,1]$, on note $A_x = \left\{ k \in [\![0,n]\!],\ \left|\frac{k}{n} - x\right| \leqslant \eta \right\}$ et B_x le complémentaire de A_x dans $[\![0,n]\!]$.

   (b) Montrer que

$$\left|B_n(f)(x) - f(x)\right| \leqslant \sum_{k \in A_x} \binom{n}{k} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| x^k (1-x)^{n-k} + \sum_{k \in B_x} \binom{n}{k} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| \frac{(k-nx)^2}{n^2 \eta^2} x^k (1-x)^{n-k}.$$

   (c) Conclure.
3. Et sur un segment $[a,b]$?

2 Applications

1. Déterminer les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ limites uniformes sur $\mathbb{R}$ d'une suite de polynômes réels.
2. Déterminer les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ pour lesquelles il existe une suite de polynômes (P_n) qui converge uniformément vers f sur tout segment de $\mathbb{R}$.
3. Montrer que toute fonction f continue $[0,1]$ est limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales paires.
4. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction continue sur $[0,1]$ soit limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales impaires.

Solution de 2 : Applications

1. Vu en cours : les fonctions polynomiales.
2. Ce sont les fonctions continues. Il suffit de choisir P_n tel que $\|f - P_n\|_{\infty,[-n,n]} \leqslant \frac{1}{2^n}$.
3. Appliquer le théorème de Weierstraß à $g : x \mapsto f(\sqrt{x})$.
4. La CNS est $f(0) = 0$.

   Si $f(0) = 0$ et f est dérivable en 0, appliquer la question précédente à $h : x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ prolongée en 0.

   Sinon, approcher uniformément f par P et appliqué le raisonnement précédent à $Q = P - P(0)$.

3 Preuve du théorème de la double limite

Soit $f : I \to \mathbb{K}$, $(f_n)_n$ une suite de fonctions appartenant à $\mathbb{K}^I$, $a \in \overline{I}$. On suppose que $(f_n)_n$ converge uniformément vers f au voisinage de a et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) \xrightarrow[x \to a]{} b_n$.

1. Montrer que si $a \in I$, on a bien $\lim\limits_{x \to a}\left(\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x)\right) = \lim\limits_{n \to +\infty}\left(\lim\limits_{x \to a} f_n(x)\right)$ en appliquant un théorème de continuité.

Sinon, l'idée est de prolonger par continuité les f_n en a en posant $f_n(a) = b_n$ pour voir appliquer le théorème précédent. Pour cela, on va commencer par montrer que (b_n) converge.

2. Montrer qu'il existe un rang N tel que si $n \geqslant N$, il existe un voisinage de a (qui dépend de n) sur lequel $|b_n| \leqslant 2 + \left|f(x)\right|$.
3. En déduire que (b_n) est bornée et qu'elle a une valeur d'adhérence b.

Soit φ une extractrice telle que $b_{\varphi(n)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} b$.

4. Montrer que $b_n \to b$ et conclure.

Solution de 3 : Preuve du théorème de la double limite

Si $a \in I$, on est ramené au théorème de continuité.

Sinon, l'idée est de prolonger par continuité les f_n en a en posant $f_n(a) = b_n$ pour voir appliquer le théorème précédent. Pour cela, on va commencer par montrer que (b_n) converge. On commence par montrer qu'elle est bornée pour appliquer le théorème de Bolzano-Weierstraß.

Soit V un voisinage de a sur lequel $(f_n)_n$ converge uniformément.

Si $n \in \mathbb{N}$ et $x \in I \cap V$, $|b_n| \leqslant \left|b_n - f_n(x)\right| + \left|f_n(x) - f(x)\right| + \left|f(x)\right|$.

On a un rang N à partir duquel $\left|f_n(x) - f(x)\right| \leqslant 1$.

On suppose dorénavant que $n \geqslant N$.

On a aussi un voisinage W_n de a sur lequel $\left|b_n - f_n(x)\right| \leqslant 1$.

En prenant $x_n \in I \cap V \cap W_n$, on tire $|b_n| \leqslant 2 + \left|f(x_n)\right|$.

Mais comme les f_n convergent en a, elle sont bornées au voisinage de a donc par convergence uniforme, f est aussi bornée (disons, par M) au voisinage de a.

On obtient donc, pour $n \geqslant N$, $|b_n| \leqslant 2 + M$ et donc (b_n) est bornée.

Par théorème de Bolezano-Weierstraß, on en extrait une suite convergente : $b_{\varphi(n)} \to b$.

On montre alors que $b_n \to b$.

Or pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in I$,

$$|b_n - b| \leqslant \left|b_n - f_n(x)\right| + \left|f_n(x) - f(x)\right| + \left|f(x) - f_{\varphi(n)}(x)\right| + \left|f_{\varphi(n)}(x) - b_{\varphi(n)}\right| + \left|b_{\varphi(n)} - b\right|.$$

Soit $\varepsilon > 0$.

On a un voisinage V' de a sur lequel, à partir d'un rang N, $\left|f_n(x) - f(x)\right| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{5}$. Comme $\varphi(n) \geqslant n$, on a alors aussi $\left|f_{\varphi(n)}(x) - f(x)\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{5}$.

Puis des voisinages W_n' et W_n'' de a sur lesquel $\left|b_n - f_n(x)\right| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{5}$ et $\left|b_{\varphi(n)} - f_{\varphi(n)}(x)\right| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{5}$ respectivement.

Puis un rang N' à partir duquel $\left|b_{\varphi(n)} - b\right| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{5}$.

Finalement, en prenant $n \geqslant \max(N, N')$ et $x \in I \cap V' \cap W_n' \cap W_n''$, alors tire $|b_n - b| \leqslant \varepsilon$.

Ainsi, $b_n \to b$.

On prolonge les f_n par continuité en a en posant $f_n(a) = b_n$, et on pose $f(a) = b$. Les f_n ainsi prolongées sont continues en a et convergent uniformément vers f (pas de problème en a car $b_n \to b$), qui est aussi continue a, donc $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} b$.

4 X–ENS

1. Montrer que si une suite (f_n) de fonctions k-lipschitzienne sur un segment $[a,b]$ converge simplement, alors la convergence est uniforme.
2. Montrer que si une suite (f_n) de fonctions convexes sur un segment $[a,b]$ converge simplement, alors la convergence est uniforme sur tout segment inclus dans $]a,b[$.

Solution de 4 : X–ENS

1. Découper $[a,b]$ en une subdivision régulière de pas inférieur à $\dfrac{\varepsilon}{3k}$ puis, pour $x\in[a,b]$, utiliser x' dans la subdivision proche de x et découper $\left|f_n(x)-f(x)\right|\leqslant\left|f_n(x)-f_n(x')\right|+\left|f_n(x')-f(x')\right|+\left|f(x')-f(x)\right|$
2. Pour $x,y\in[\alpha,\beta]\subset]a,b[$ avec $x<y$, utiliser l'inégalité des trois pentes pour les cordes entre a et α, x et y, b et β pour obtenir la lipschitzianité de f_n sur $[\alpha,\beta]$ et se ramener à la question précédente.

2. Séries de fonctions

5 Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $f_n : x\in\mathbb{R}^+\mapsto \mathrm{Arctan}(x+n)-\mathrm{Arctan}(n)$.

1. Étudier l'existence et la continuité de $f=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$.
2. Montrer que $S(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}+\infty$.

Solution de 5 :

1. Utiliser le théorème des accroissements finis ou une écriture sous forme intégrale. CN sur tout segment.
2. Justifier qu'une limite finie ou non existe et la minorer par une somme partielle (comme pour ζ en 1...)
   Ou utiliser une écriture de f_n sous forme intégrale.

6 Mines-Ponts On pose $S(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{1+x^n}$.

1. Étudier l'existence et la continuité de S.
2. Donner des équivalents en 0 et 1^-.

Solution de 6 : Mines-Ponts

1. Pour $|x|\geqslant 1$, la série est grossièrement divergente.
   Pour $|x|<1$,
$$\frac{x^n}{1+x^n}\sim x^n$$

et la série est absolument convergente.
La fonction S est définie sur $]-1,1[$.
Posons $u_n(x) = \dfrac{x^n}{1+x^n}$.
La série $\sum u_n$ converge simplement et les fonctions u_n sont continues.
Soit $a \in [0,1[$.

$$\|u_n\|_{\infty,[-a,a]} \leqslant a^n$$

ce qui assure la convergence normale de $\sum u_n$ sur tout segment de $]-1,1[$. Par théorème, la fonction S est continue.

2. On a déjà $S(0) \underset{x\to 0}{\sim} S(0) = \dfrac{1}{2}$.
Pour $x \in [0,1[$,

$$S(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p x^{n(p+1)}\right).$$

Puisque $\sum_{p\geqslant 0}\left|(-1)^p x^{n(p+1)}\right|$ converge et $\sum_{n\geqslant 1}\sum_{p=0}^{+\infty}\left|(-1)^p x^{n(p+1)}\right|$ aussi, on peut permuter les deux sommes et affirmer

$$S(x) = \frac{1}{2} + \sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p \frac{x^{p+1}}{1-x^{p+1}}.$$

On a alors

$$(1-x)S(x) = \frac{1-x}{2} + \sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p u_p(x)$$

avec

$$u_p(x) = x^{p+1}\frac{1-x}{1-x^{p+1}}$$

pour $x \in [0,1[$.
La fonction u_p est continue sur $[0,1[$ et se prolonge par continuité en 1 en posant $u_p(1) = 1/(p+1)$.
Le critère spécial des séries alternées s'applique à la série $\sum(-1)^p u_p(x)$ et donc

$$\|\sum_{k=p+1}^{\infty}(-1)^k u_k(x)\Big|_\infty \leqslant u_{p+1}(x)$$

Une étude de variation permet d'affirmer $u_{p+1}(x) \leqslant \frac{1}{p+2}$. Ainsi, la série $\sum u_n$ converge uniformément sur $[0,1]$ et donc sa somme est continue en 1. Cela permet d'affirmer

$$(1-x)S(x) \xrightarrow[x\to 1^-]{} \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)p}{p+1} = \ln(2)$$

et, finalement,

$$S(x) \underset{x\to 1^-}{\sim} \frac{\ln(2)}{1-x}$$

---

7 **X–ENS** On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, $u_n(x) = (-1)^n \underbrace{\sin(\sin(\cdots(\sin x)\cdots))}_{n \text{ fois}}$.

Montrer que la série de fonction $\sum u_n$ converge simplement mais pas normalement sur $\mathbb{R}$.
La convergence est-elle uniforme sur $\mathbb{R}$?

Solution de 7 : X–ENS

FGN 5 2.4

On pose $v_n(x)=\sin(\sin(\cdots(\sin x)\cdots))\in[-1,1]$ pour $n\geqslant 1$.

Comme $\sin x$ est du signe de x sur $[-1,1]$, $v_n(x)$ est du signe de $v_1(x)$: la série est alternée.

De l'inégalité classique $|\sin x|\leqslant|x|$, on tire la décroissance de $(|u_n(x)|)_n$, qui est minorée par 0 elle converge donc vers ℓ tel que $|\sin\ell|=|\ell|$.

Par étude de $\sin-\mathrm{id}$ et $\sin+\mathrm{id}$, on tire $\ell=0$: le TSSA s'applique et donne la convergence simple.

Pour l'absence de convergence normale, on remarque que $\|u_n\|_\infty=v_{n-1}(1):=a_n$. On cherche un équivalent de a_n.

Pour cela, comme $a_n\to 0$ et $a_{n+1}=\sin a_n=a_n-\dfrac{a_n^3}{6}+\mathrm{o}\left(a_n^3\right)$, on remarque que pour $\alpha\in\mathbb{R}$,

$$a_{n+1}^\alpha-a_n^\alpha=a_n^\alpha\left(\left(1-\frac{a_n^2}{6}+\mathrm{o}\left(a_n^2\right)\right)^\alpha-1\right)=a_n^\alpha\left(1-\frac{\alpha a_n^2}{6}+\mathrm{o}\left(a_n^2\right)-1\right)\sim-\frac{\alpha}{6}a_n^{\alpha+2}$$

Pour avoir un équivalent constant, on choisit $\alpha=-2$ et comme $\sum\frac{1}{3}$ diverge, par sommation dans le cas de divergence,

$$a_n^{-2}-a_n^{-2}=\sum_{k=2}^{n-2}\left(a_{k+1}^{-2}-a_k^{-2}\right)\sim\frac{n-3}{3}\sim\frac{n}{3}$$

Et comme $a_n\to 0$, on tire $a_n^{-2}\sim\dfrac{n}{3}$ puis $a_n\sim\sqrt{\dfrac{3}{n}}$ ce qui permet bien de conclure l'absence de convergence normale.

Pour la convergence uniforme, par le TSSA, $\forall\, x\in\mathbb{R},\quad |R_n(x)|\leqslant|u_{n+1}(x)|\leqslant a_{n+1}\to 0$ permet de conclure.

8 X–ENS

1. Quelle est la limite simple de (f_n) où $f_n: z\in\mathbb{C}\mapsto\left(1+\dfrac{z}{n}\right)^n$?
2. Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $k\in[\![1,n]\!]$.Montrer que
$$1-\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k}\leqslant\sum_{j=0}^{k-1}\frac{j}{n}$$
3. En déduire que (f_n) converge uniformément sur tout $D_f(0,R)$ avec $R>0$.

Solution de 8 : X–ENS

FGN 5 2.35

1. Théorème de la double limite appliqué à $g_k : x\mapsto\dfrac{x(x-1)\cdots(x-k+1)z^k}{k!x^k}\mathbb{1}_{[k,+\infty[}(x)$: convergence simple vers $\exp$.
2. Récurrence sur k.
3. Séparer dans $\left|f_n(z)-\exp z\right|$ les termes d'indices $\leqslant n$ et $>n$ et utiliser la question précédente.