1. Suites de fonctions

1 Preuve du théorème de Weierstraß par les polynômes de Bernstein

Soit f continue sur $[0,1]$ à valeurs réelles. On définie les fonctions polynômes de Bernstein associées à f, pour tout $n\in\mathbb{N}$, définie sur $[0,1]$, par $B_n(f): x\mapsto \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right)x^k(1-x)^{n-k}$.

1. Calculer $B_n(u)$ où $u: x\mapsto 1$, $B_n(\mathrm{id})$, $B_n(v)$ où $v: x\mapsto x^2$.
2. Soit $\varepsilon>0$.
   (a) Justifier l'existence de $\eta>0$ tel si $x,x'\in[0,1]$, $|x-x'|\leqslant\eta \Longrightarrow |f(x)-f(x')|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$.

   Pour $x\in[0,1]$, on note $A_x=\left\{k\in[\![0,n]\!],\ \left|\frac{k}{n}-x\right|\leqslant\eta\right\}$ et B_x le complémentaire de A_x dans $[\![0,n]\!]$.

   (b) Montrer que
$$|B_n(f)(x)-f(x)|\leqslant \sum_{k\in A_x}\binom{n}{k}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|x^k(1-x)^{n-k}+\sum_{k\in B_x}\binom{n}{k}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|\frac{(k-nx)^2}{n^2\eta^2}x^k(1-x)^{n-k}.$$
   (c) Conclure.
3. Et sur un segment $[a,b]$?

2 Applications

1. Déterminer les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ limites uniformes sur $\mathbb{R}$ d'une suite de polynômes réels.
2. Déterminer les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ pour lesquelles il existe une suite de polynômes (P_n) qui converge uniformément vers f sur tout segment de $\mathbb{R}$.
3. Montrer que toute fonction f continue $[0,1]$ est limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales paires.
4. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction continue sur $[0,1]$ soit limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales impaires.

3 Preuve du théorème de la double limite

Soit $f: I\to\mathbb{K}$, $(f_n)_n$ une suite de fonctions appartenant à $\mathbb{K}^I$, $a\in\overline{I}$. On suppose que $(f_n)_n$ converge uniformément vers f au voisinage de a et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $f_n(x)\xrightarrow[x\to a]{} b_n$.

1. Montrer que si $a\in I$, on a bien $\lim\limits_{x\to a}\left(\lim\limits_{n\to+\infty}f_n(x)\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\lim\limits_{x\to a}f_n(x)\right)$ en appliquant un théorème de continuité.

Sinon, l'idée est de prolonger par continuité les f_n en a en posant $f_n(a)=b_n$ pour voir appliquer le théorème précédent. Pour cela, on va commencer par montrer que (b_n) converge.

2. Montrer qu'il existe un rang N tel que si $n\geqslant N$, il existe un voisinage de a (qui dépend de n) sur lequel $|b_n|\leqslant 2+|f(x)|$.
3. En déduire que (b_n) est bornée et qu'elle a une valeur d'adhérence b.

Soit φ une extractrice telle que $b_{\varphi(n)}\xrightarrow[n\to+\infty]{} b$.

4. Montrer que $b_n\to b$ et conclure.

4 X–ENS

1. Montrer que si une suite (f_n) de fonctions k-lipschitzienne sur un segment $[a,b]$ converge simplement, alors la convergence est uniforme.
2. Montrer que si une suite (f_n) de fonctions convexes sur un segment $[a,b]$ converge simplement, alors la convergence est uniforme sur tout segment inclus dans $]a,b[$.

2. Séries de fonctions

5

Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $f_n: x\in\mathbb{R}^+\mapsto \mathrm{Arctan}(x+n)-\mathrm{Arctan}(n)$.

1. Étudier l'existence et la continuité de $f=\sum_{n=0}^{+\infty}f_n$.
2. Montrer que $S(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}+\infty$.

6 Mines-Ponts

On pose $S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{1+x^n}$.

1. Étudier l'existence et la continuité de S.
2. Donner des équivalents en 0 et 1^-.

7 X–ENS

On pose, pour $n\in\mathbb{N}^*$ et $x\in\mathbb{R}$, $u_n(x)=(-1)^n\underbrace{\sin(\sin(\cdots(\sin x)\cdots))}_{n \text{ fois}}$.

Montrer que la série de fonction $\sum u_n$ converge simplement mais pas normalement sur $\mathbb{R}$. La convergence est-elle uniforme sur $\mathbb{R}$?

8 X–ENS

1. Quelle est la limite simple de (f_n) où $f_n: z\in\mathbb{C}\mapsto\left(1+\frac{z}{n}\right)^n$?
2. Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $k\in[\![1,n]\!]$.Montrer que
$$1-\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k}\leqslant\sum_{j=0}^{k-1}\frac{j}{n}$$
3. En déduire que (f_n) converge uniformément sur tout $D_f(0,R)$ avec $R>0$.