TD ∗ Dénombrement, Dénombrabilité, Sommabilité

1. Dénombrement

1 Nombre de dérangements

1. Soit d_n le nombre de permutations de $\mathfrak{S}_n$ n'ayant pas de point fixe (appelées **dérangements**). On pose $d_0 = 1$. Montrer que $n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_{n-k}$. En déduire que $d_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.

   Par le calcul en partant du membre de droite et en faisant apparaître des coefficients binomiaux, ou bien à l'aide de la formule d'inversion de Pascal.

2. Montrer, sans utiliser la question précédente, que pour tout $n \geqslant 2$, $d_{n+1} = n(d_n + d_{n-1})$. En déduire que $d_n = n d_{n-1} + (-1)^n$ puis retrouver la formule donnant d_n.

   S'intéresser aux ensembles des dérangements de $\mathfrak{S}_{n+1}$ tels que $\sigma(n+1) = k$ fixé.

2 Formule du crible

1. Soient $A_1, \dots, A_n$ des ensembles finis. Montrer que

$$|A_1 \cup \dots \cup A_n| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \dots < i_k \leqslant n} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}| = \sum_{\varnothing \neq I \in \mathscr{P}([\![1,n]\!])} (-1)^{|I|+1} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right|.$$

   Utiliser des fonctions indicatrices.

2. Retrouver une formule donnant le nombre de surjection de $[\![1,p]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$ en utilisant la formule du crible.

   Utiliser les ensembles A_k des applications de $[\![1,p]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$ n'atteignant pas la valeur k.

3. Retrouver une formule donnant le nombre de dérangements de $\mathfrak{S}_n$ en utilisant la formule du crible.

   Utiliser les ensembles A_k des permutations fixant la valeur k.

3 Nombre de permutation de $\mathfrak{S}_n$ involutives

Déterminer, sous forme de somme, le nombre de permutation de $\mathfrak{S}_n$ involutives (c'est-à-dire étant leur propre inverse).

Utiliser la décomposition en cycles à supports disjoints.

4 Partitions d'un entier

1. Déterminer
   - ★ le nombre a_n d'écritures possibles de n comme somme d'au moins un entier naturel non nuls (l'ordre étant important).
   - ★ le nombre $b_{n,k}$ d'écritures possibles de n comme somme d'exactement $k \in \mathbb{N}^*$ entiers naturels non nuls (l'ordre étant important).
   - ★ le nombre $c_{n,k}$ d'écritures possibles d'entiers entre 1 et n comme somme d'exactement $k \in \mathbb{N}^*$ entiers naturels non nuls (l'ordre étant important).
2. Soit $n, k \in \mathbb{N}$. Déterminer le nombre $N_{n,k}$ d'écritures de n comme somme de k entiers naturels (éventuellement nuls, donc).

   On pourra essayer de placer des barres | parmi n ∘ et interpréter cela comme des mots sur un alphabet à deux lettres, ou bien trouver une formule de récurrence.

2. Dénombrabilité

5

On dit qu'un nombre complexe est algébrique lorsqu'il est racine d'un polynôme non nul à coefficients entiers. Montrer que l'ensemble des nombres algébriques est dénombrable.

Il y a donc beaucoup de nombres transcendants.

On pourra commencer par s'intéresser à des polynômes « pas trop gros ».

6

Montrer que l'ensemble des extractrices n'est pas dénombrable.

Peut-on dire que l'ensemble des suites extraites d'une suite donnée n'est jamais dénombrable ?

7 ENS Ulm

L'ensemble $\mathfrak{S}(\mathbb{N})$ des permutations de $\mathbb{N}$ est-il dénombrable ?

8 Théorème de Cantor-Bernstein

1. Soit E un ensemble et $\varphi : \mathscr{P}(E) \to \mathscr{P}(E)$ croissante pour l'inclusion.
   Montrer, en introduisant $A = \bigcup_{X \subset \varphi(X)} X$, que φ admet un point fixe.
2. Soient E et F deux ensembles. On suppose qu'il existe une injection $f : E \to F$ et une injection $g : F \to E$.
   En considérant l'application qui à $X \in \mathscr{P}(E)$ associe $E \setminus (g(F \setminus f(X)))$, montrer que E et F sont équipotents.

   Prendre un point fixe A de cette application et introduire les bijections induites par f sur A et g sur $F \setminus f(A)$.

3. Sommabilité

9 Centrale

Montrer que la famille $\left(\frac{1}{pq(p+q-1)}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^{*2}}$ est sommable et calculer sa somme.

10 Mines

On admet que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Montrer que la famille $\left(\frac{(-1)^{mn}}{m^2 n^2}\right)_{(m,n)\in\mathbb{N}^{*2}}$ est sommable et calculer sa somme.

11 X-ENS

Pour $n \geqslant 2$, on note q_n le plus grand diviseur premier de n.

Quelle est la nature de la série de terme général $\frac{1}{nq_n}$?

12 Oral X-ENS

Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite complexe sommable. On suppose que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $\sum_{n\geqslant 0} a_{kn} = 0$ et on veut établir que (a_n) est la suite nulle.

1. Montrer que $a_0 = 0$.
2. On définit la fonction de Möbius $\mu : \mathbb{N}^* \to \mathbb{Z}$ par $\mu(1) = 1$, $\mu(p_1 \cdots p_s) = (-1)^s$ si $p_1, \dots, p_s$ sont premiers distincts, $\mu(n)$ dans les autres cas. Calculer $\sum_{d|n} \mu(d)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Conclure en exploitant la relation $0 = \sum_{d|n} \left(\sum_{m\geqslant 0} a_{dm}\right) \mu(d)$.

13 Classique

Soit $s \geqslant 1$.

1. Montrer que la suite double $\left(2^{-sm} 3^{-sn}\right)_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable. Calculer sa somme, que l'on notera S.
2. Montrer que si $s > 1$, alors $S < \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^s}$ puis que si $s \geqslant 1$, alors $S > \sum_{k=1}^{5-1} \frac{1}{k^s}$.
3. Montrer que la suite triple $\left(2^{-sn_1} 3^{-sn_2} 5^{-sn_3}\right)_{(n_1,n_2,n_3)\in\mathbb{N}^3}$ est sommable. Calculer sa somme, que l'on notera S_3.
4. Montrer que si $s > 1$, alors $S_3 < \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^s}$ puis que si $s \geqslant 1$, alors $S_3 > \sum_{k=1}^{7-1} \frac{1}{k^s}$.
5. Pour $s > 1$, étendre les résultats précédents et justifier la formule $\prod_{p\in\mathscr{P}} \frac{1}{1-p^{-s}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$ où $\mathscr{P}$ désigne l'ensemble des nombres premiers.
6. Pour $s = 1$, étendre les résultats précédents et montrer que $\sum_{p\in\mathscr{P}} \frac{1}{p} = +\infty$.