1. Suites de fonctions

- Pour étudier la convergence uniforme d'une suite de fonctions $(f_n)_n$, on commence par la convergence simple qui donne une fonction limite f. Puis
  - Soit on veut montrer qu'il y a convergence uniforme
    - on majore uniformément $|f_n(x)-f(x)| \leqslant \cdots \leqslant \alpha_n$ indépendant de x convergent vers 0
    - Ou on trouve $\|f_n-f\|_\infty$ par une étude de fonction et on montre qu'elle tend vers 0
    - Pour une convergence sur tout segment, on cherche une majoration analogue à la précédente en utilisant les bornes du segment.
  - Soit on veut montrer qu'il n'y a pas convergence uniforme et on peut
    - Exhiber une suite (x_n) telle que $f_n(x_n)-f(x_n) \not\to 0$.
    - Montrer que f est non bornée ou non continue alors que les f_n le sont, ou (voir plus tard) que l'intégrale sur un segment des f_n ne converge pas vers l'intégrale de f.
- Et donc, avec des hypothèses à connaître, le caractère borné, la continuité, (on verra plus tard qe c'est aussi le cas de l'intégrale sur un segment) se transmettent par convergence uniforme. On peut aussi échanger des limites avec l'hypothèse de convergence uniforme.
- Savoir aussi qu'on peut approcher uniformément sur un segment des fonctions continues par morceaux par des fonctions en escalier et des fonctions continues par des polynômes (théorème de Weierstraß).
- Les propriétés définies à partir d'égalités ou d'inégalités larges se transmettent par convergence simple : positivité, monotonie, lipschitziannité (à rapport constant), linéarité, parité, périodicité.

1 CCINP 9 : définition de la convergence uniforme

2 CCINP 11 : condition de non convergence uniforme

3 CCINP 12 : Convergence uniforme et continuité

4 Ex CCINP 13 : convergence uniforme et fonctions bornées

1. Soit (g_n) une suite de fonctions de X dans $\mathbb{C}$, X désignant un ensemble non vide quelconque.
   On suppose que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, g_n est bornée et que la suite (g_n) converge uniformément sur X vers g.
   Démontrer que la fonction g est bornée.
2. Pour tout entier naturel n non nul, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x)=\begin{cases} n^3x & \text{si } |x|\leqslant \frac{1}{n} \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } |x|>\frac{1}{n}\end{cases}$$

   Prouver que la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$.
   La convergence est-elle uniforme sur $\mathbb{R}$?

5

Étudier la convergence des suites de fonctions

1. $f_n : x\in[0,\frac{\pi}{2}]\mapsto \sqrt{n}\cos^n x\sin x$.
2. $g_n : x\in\mathbb{R}\mapsto \dfrac{2nx^2}{1+n^2x^4}$.
3. $h_n : x\in\mathbb{R}\mapsto \dfrac{2^n x}{1+n2^n x^2}$.
4. $i_n : x\in\mathbb{R}\mapsto \dfrac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}$.
5. $j_n : x\in\mathbb{R}\mapsto \sin\left(\dfrac{n+1}{n}x\right)$.

6

Soient $\alpha\in\mathbb{R}$ et $p\in\mathbb{N}^*$ fixés. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on note f_n la fonction de $\mathbb{R}^+$ vers $\mathbb{R}$ définie par $\forall x\in\mathbb{R}^+,\ f_n(x)=x^p(1+n^\alpha e^{-nx})$.

1. Montrer que $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers une fonction f que l'on précisera.
2. Démontrer que $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}^+$ si et seulement si $p>\alpha$.

7

Soit $f\in\mathbb{R}^\mathbb{R}$ continue sur $\mathbb{R}$. Étudier la convergence de la suite de fonctions $f_n : x\mapsto\sqrt{f(x)^2+\frac{1}{n}}$.

8

Soit (f_n) une suite de fonctions qui converge uniformément vers une fonction f, (g_n) une suite de fonctions qui converge uniformément vers une fonction g.

Vérifier que (f_n+g_n) converge uniformément vers $f+g$.

Donner une condition suffisante simple portant sur h pour que la suite de fonction (hf_n) converge uniformément vers hf.

9

Montrer que toute fonction continue sur un segment est limite uniforme d'une suite de fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur ce segment.

10 Théorème de Weierstraß par les polynômes de Bernstein

Soit f continue sur $[0,1]$ à valeurs réelles. On définie les fonctions polynômes de Bernstein associées à f, pour tout $n\in\mathbb{N}$, définie sur $[0,1]$, par $B_n(f) : x\mapsto\displaystyle\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}f\left(\frac{k}{n}\right)x^k(1-x)^{n-k}$.

1. Calculer $B_n(u)$ où $u : x\mapsto 1$.
2. Que vaut, pour $k\in[\![1,n]\!]$, $\dfrac{k}{n}\dbinom{n}{k}$? En déduire $B_n(\mathrm{id})$.
3. Calculer de même $B_n(v)$ où $v : x\mapsto x^2$.
4. Soit $\varepsilon>0$.
   (a) Justifier l'existence d'un réel M tel que pour tout x dans $[0,1]$, $|f(x)|\leqslant M$.
   (b) Justifier l'existence de $\eta>0$ tel si $x,x'\in[0,1]$, $|x-x'|\leqslant\eta\Longrightarrow|f(x)-f(x')|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$.
   Pour $x\in[0,1]$, on note $A_x=\left\{k\in[\![0,n]\!],\ \left|\frac{k}{n}-x\right|\leqslant\eta\right\}$ et B_x le complémentaire de A_x dans $[\![0,n]\!]$.
   (c) Montrer que

$$|B_n(f)(x)-f(x)|\leqslant\sum_{k\in A_x}\binom{n}{k}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|x^k(1-x)^{n-k}+\sum_{k\in B_x}\binom{n}{k}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|\frac{(k-nx)^2}{n^2\eta^2}x^k(1-x)^{n-k}.$$

   (d) En déduire que $|B_n(f)(x)-f(x)|\leqslant\dfrac{\varepsilon}{2}+\dfrac{M}{2n\eta^2}$.
5. Conclure.

11 Que peut-on dire d'un polynôme borné sur $\mathbb{R}$? Montrer que si $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est limite uniforme de polynômes, alors f est un polynôme.

2. Séries de fonctions

- Il est absolument nécessairement de maîtriser les techniques d'étude des séries d'une part et des suites de fonctions d'autre part pour aborder ce TD.
- Problèmes de convergence :
  - **Convergence simple** : il s'agit d'une étude classique de série, avec un paramètre. Rappelons qu'on peut utiliser
    - La convergence absolue : $\sum |f_n(x)|$ à ne pas confondre avec la convergence normale. Utilisation des relations de comparaison $\leqslant, o, O, \sim$).
    - La comparaison série-intégrale si $f_n(x)=g(n,x)$ avec $t\mapsto g(t,x)$ monotone (par rapport à t et non x).
    - Le théorème spécial sur les séries alternées.
    - Plus rarement : le calcul des sommes partielles.
  - **Convergence normale** : celle qu'on recherche prioritairement, souvent même avant la convergence simple qu'elle implique (par convergence absolue) et la convergence uniforme. Une convergence normale sur tout segment est souvent suffisante.
  - **Convergence uniforme** : On s'y intéresse seulement lorsqu'il n'y a pas convergence normale (éventuellement sur tout segment). Cela revient à avoir la convergence uniforme vers 0 des restes. Penser par exemple à la majoration du reste dans le théorème sur les séries alternées, ou à une comparaison série-intégrale.
- Étude de la fonction somme d'une série de fonction :
  - **Continuité** : on utilise le théorème de transfert par convergence uniforme (sur tout segment).
  - **Limites, équivalents** : penser au théorème de la double limite (attention, aux bornes de l'intervalle, la convergence uniforme sur tout segment ne suffit pas.) S'il ne s'applique pas, on peut penser à une comparaison avec une intégrale.
    Pour les équivalents, c'est plus compliqué. On peut penser à la comparaison avec une intégrale, ou à sortir certains termes de la somme...

A. Exercices vus en cours

12 Étudier la convergence simple de $\sum f_n$ où $f_n : x\mapsto e^{-\sqrt{n}x}$

13 Étudier la convergence simple de $\sum f_n$ où $f_n : x\mapsto \dfrac{\cos(nx)}{1+n^2x^2}$

14 Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\alpha\in\mathbb{R}$ pour que $\sum n^\alpha x e^{-n^2x}$ converge normalement sur $\mathbb{R}^+$. Dans le cas contraire, préciser sur quels types d'intervalles il y a convergence normale.

15 Étudier la convergence normale de $\sum f_n$ où $f_n : x\mapsto \dfrac{\sin(nx)}{n^2}$.

16 A-t-on convergence normale de $\sum f_n$ où $f_n : x\in\mathbb{R}^+\mapsto xe^{-n^2x^2}$?

17 Soit $f_n : x\mapsto \dfrac{1}{1+n^2x^2}$.

1. Étudier la convergence simple de $\sum f_n$.
2. Montrer que la somme f de la série est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Montrer qu'il n'y a pas de convergence normale sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. Calculer la limite en $+\infty$ de f.

18 Soit $f_n : x\in\mathbb{R}^+\mapsto \dfrac{x}{(1+x^2)^n}$ pour $n\in\mathbb{N}$.

1. Montrer que $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ et calculer de $f=\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$.
2. Montrer que la série convergence normalement sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$.
3. Montrer que la conclusion du théorème de la double-limite ne tient pas en 0^+.

19 Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $x\in[0,1]$, $f_n(x)=(-1)^n x^n(1-x)^2$.

Montrer que $\sum f_n$ converge normalement sur $[0,1]$ puis déterminer $f=\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$.

En déduire la valeur de $S=\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{(n+1)(n+2)(n+3)}$.

20 Pour $n\in\mathbb{N}$ et $x>0$, on pose $f_n(x)=\dfrac{(-1)^n}{n+x}$.

1. Montrer que $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$.

   On note f la somme de la série.
2. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_*^+$ et calculer f'.
3. Étudier les variations de f.

B. Exercices CCINP

21 **CCINP 8 : Séries alternées**

22 **CCINP 15 : Convergences normale et uniforme**

23 **CCINP 17 : CN de la série de fonction ⇒ CU du TG vers 0**

24 CCINP 18 : Convergence et continuité d'une série de fonctions

25 CCINP 53 : Étude d'une série de fonctions

C. Autres exercices

26 Fonctions ζ de Riemann et η de Dirichlet[1]

On pose $\zeta(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x}$ et $\eta(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^x}$.

1. Pour quelles valeurs de x peut-on définir $\zeta(x)$?
2. Sur quel type d'intervalles a-t-on convergence normale ?
3. Étudier les variations de ζ.
4. Calculer la limite en $+\infty$.
5. Calculer la limite en 1. Le théorème de la double-limite s'applique-t-il ? Que peut-on en déduire ?
6. Donner un équivalent en 1 en comparant à une intégrale.
7. Tracé le graphe de ζ.
8. Pour quelles valeurs de x peut-on définir $\eta(x)$? Sur quel type d'intervalles a-t-on convergence normale ? uniforme ?
9. Montrer que si $x>1$, $\eta(x)=\left(2^{1-x}-1\right)\zeta(x)$. Retrouver l'équivalent de ζ en 1.

27

Continuité et limites de $f(x)=\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^4+n^2x^2}$.

28

Démontrer que $f : x\mapsto\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin\left(\pi n^2 x\right)}{n^2}$ définit une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

29

Étudier la convergence simple, uniforme, normale de la série de fonctions

$$f_n : x\in\mathbb{R}_+^*\mapsto \mathrm{e}^{-n^2x}.$$

Déterminer sa limite en $+\infty$, ainsi qu'un développement asymptotique de la somme à la précision e^{-2x} au voisinage de $+\infty$.

Indication : On pourra sortir quelques termes de la somme et vérifier que le reste est négligeable.

30

Étudier la convergence sur $\mathbb{R}^+$ de la série de fonction $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(x\mapsto(-1)^n\ln\left(1+\frac{x}{n+1}\right)\right)$. Sa somme est-elle continue ?

1. Incontournable : presque du cours.

31 Oral des Mines

On pose $f : x\mapsto\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2x}{x^2+n^2}$.

1. Domaine de définition de f.
2. Parité de f.
3. Continuité de f.
4. Limite en $+\infty$
5. La convergence est-elle uniforme ?

32

1. Pour quelles valeurs du réel x la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n+n^2x^2}$ converge-t-elle ?
2. Démontrer la continuité de la somme sur son domaine de définition.
3. Donner un équivalent de sa somme au voisinage de 0 et de $+\infty$.

33

Pour tout réel $x\notin\mathbb{Z}^-$, on pose $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}$ et $g(x)=\mathrm{e}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$.

1. Justifier l'existence de $f(x)$ et $g(x)$.
2. Déterminer leurs limites en $+\infty$.
3. Trouver une relation entre $f(x+1)$ et $f(x)$ et montrer que g vérifie cette même relation.
4. En déduire que $f=g$.

34

Montrer que $f : x\mapsto\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^2}{\mathrm{e}^{-2nx}+\mathrm{e}^{3nx}}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

35

Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $f_n : x\in\mathbb{R}^+\mapsto\mathrm{Arctan}(x+n)-\mathrm{Arctan}(n)$.

1. Étudier l'existence et la continuité de $f=\sum_{n=0}^{+\infty}f_n$.
2. Montrer que $S(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}+\infty$.