1. Vrai ou Faux

1. Toute partie de $\mathbb{N}$ qui n'est pas en bijection avec $\mathbb{N}$ est finie.
2. $\mathbb{Q}^2$ est dénombrable.
3. $\mathbb{R}\times\mathbb{Z}$ n'est pas dénombrable.
4. $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est sommable si et seulement si la série $\sum z_n$ est absolument convergente.
5. Si une série converge, toute série obtenue en permutant ses termes converge.

2. Dénombrement

1 Combien peut-on construire de nombres comportant 6 chiffres (en base décimale) et ne contenant aucune répétition ? une seule répétition ?

Solution de 1 :

- Sans aucune répétition, cela revient à choisir le premier chiffre non nul et à avoir tous les chiffres différents.
  Soit $9\times A_9^5=9\times 9\times 8\times 7\times 6\times 5=136080$ nombre différents.
  Vérification avec python :

```python
def sans_repetition():
    compteur = 0
    for nombre in range(10 ** 5, 10 ** 6):
        if len(set(str(nombre))) == 6:
            compteur +=1
    return compteur

>>> sans_repetition()
136080
```

- Avec exactement une répétition, il faut faire une disjonction de cas.
  - Soit le chiffre répété est 0, ce n'est donc pas le premier, et il faut choisir les places de la répétition et tous les autres chiffres soit $\binom{5}{2}\times A_9^4=10\times 9\times 8\times 7\times 6=30240$ possibilités.
  - Soit le chiffre répété n'est pas 0, et il faut choisir ce chiffre : 9 possibilités, puis
    - si le premier chiffre est répété, il faut choisir la place de la répétition, et tous les autres chiffres soit
    $$5\times A_9^4=5\times 9\times 8\times 7\times 6$$
    possibilités.
    - si le premier chiffre n'est pas répété, il faut choisir les places de la répétition, le premier chiffre et les autres chiffres soit $\binom{5}{2}\times 8\times A_8^3=10\times 8\times 8\times 7\times 6$ possibilités.

  Soit, dans ce cas, $9\times(5\times 9\times 8\times 7\times 6+10\times 8\times 8\times 7\times 6)=378000$ possibilités.

On trouve finalement 408240 tels nombres (soit 3 fois plus).
Vérification avec python :

Python

```python
def avec_repetition():
    compteur = 0
    for nombre in range(10 ** 5, 10 ** 6):
        if len(set(str(nombre))) == 5:
            compteur +=1
    return compteur

>>> avec_repetition()
408240
```

2 Combien y a-t-il de p-cycles dans $\mathfrak{S}_n$?

Solution de 2 :

On choisit les p éléments du cycle, on fixe le premier terme et on permute de toutes les manières possibles les autres termes. Il y a donc $\binom{n}{p}(p-1)!$ p-cycles.

3 Soit E un ensemble fini à n éléments, A une partie de E à p éléments. Combien peut-on trouver de parties de E ayant exactement un élément de A ?

Solution de 3 :

On choisit l'élément de A : p possibilité, puis une partie de $E \setminus A$: 2^{n-p} possibilités.
Ainsi, il y a $p2^{n-p}$ telles parties.

4 Montrer que dans un ensemble fini non vide, il y a autant de parties de cardinal pair que de parties de cardinal impair.

Solution de 4 :

1re méthode Soit x un élément fixé de l'ensemble. L'application $A \mapsto A \cup \{x\}$ si $x \notin A$ et $A \setminus \{x\}$ si $x \in A$ est bien défini de l'ensemble des parties paires dans l'ensemble des parties impaires ou l'inverse, et ces deux applications sont réciproques l'une de l'autre.

2e méthode Le cardinal de l'ensemble des parties de cardinal pair est $A = \sum_{0 \leqslant 2k \leqslant n} \binom{n}{2k}$, celui de l'ensemble des parties de cardinal impair est $B = \sum_{0 \leqslant 2k+1 \leqslant n} \binom{n}{2k+1}$.
Ces sommes se calculent classiquement en remarquant que $A+B=2^n$ et $A-B=0^n$ en utilisant le binôme.
Si $n \neq 0$, on obtient en particulier $A=B$.

5 **CCINP 112**

Solution de 5 : CCINP 112

1. On note $F = \{(A,B) \in (\mathscr{P}(E))^2 \ / \ A \subset B\}$.
   Soit $p \in [\![1,n]\!]$. On pose $F_p = \{(A,B) \in (\mathscr{P}(E))^2 \ / \ A \subset B \text{ et } \text{card} B = p\}$.

   Pour une partie B à p éléments donnée, le nombre de parties A de E telles que $A \subset B$ est $\text{card}\mathscr{P}(B) = 2^p$.
   De plus, on a $\binom{n}{p}$ possibilités pour choisir une partie B de E à p éléments.
   On en déduit que : $\forall p \in [\![0,n]\!]$, $\text{card} F_p = \binom{n}{p} 2^p$.
   Or $F = \bigcup\limits_{p=0}^{n} F_p$ avec $F_0, F_1, ..., F_n$ deux à deux disjoints.
   Donc $a = \text{card} F = \sum\limits_{p=0}^{n} \text{card} F_p = \sum\limits_{p=0}^{n} \binom{n}{p} 2^p = 3^n$, d'après le binôme de Newton.
   Conclusion : $a = 3^n$.

   Autre méthode :

   Le raisonnement suivant (corrigé non détaillé) permet également de répondre à la question 1.
   Notons encore $F = \{(A,B) \in (\mathscr{P}(E))^2 \ / \ A \subset B\}$.
   À tout couple (A,B) de F, on peut associer l'application $\varphi_{A,B}$ définie par :
   $$\varphi_{A,B} : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \{1,2,3\} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in A \\ 2 & \text{si} \quad x \notin A \text{ et } x \in B \\ 3 & \text{si} \quad x \notin B \end{cases} \end{array}$$
   On note $\mathscr{A}(E,\{1,2,3\})$ l'ensemble des applications de E dans $\{1,2,3\}$.

   Alors l'application $\Theta : \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & \mathscr{A}(E,\{1,2,3\}) \\ (A,B) & \longmapsto & \varphi_{A,B} \end{array}$ est bijective.

   Le résultat en découle.

2. $\{(A,B) \in (\mathscr{P}(E))^2 \ / \ A \cap B = \varnothing\} = \{(A,B) \in (\mathscr{P}(E))^2 \ / \ A \subset \overline{B}\}$.

   $$\begin{aligned} \text{Or card } \{(A,B) \in (\mathscr{P}(E))^2 \ / \ A \subset \overline{B}\} &= \text{card } \{(A,\overline{B}) \in (\mathscr{P}(E))^2 \ / \ A \subset \overline{B}\} \\ &= \text{card } \{(A,C) \in (\mathscr{P}(E))^2 \ / \ A \subset C\} \\ &= a. \end{aligned}$$

   Donc $b = a$.

3. Compter tous les triplets (A,B,C) tels que A, B et C soient deux à deux disjoints et tels que $A \cup B \cup C = E$ revient à compter tous les couples (A,B) tels que $A \cap B = \varnothing$ car, alors, C est obligatoirement égal à $\overline{A \cup B}$.
   En d'autres termes, $c = \text{card } \{(A,B) \in (\mathscr{P}(E))^2 \ / \ A \cap B = \varnothing\} = b = 3^n$.

6 Déterminer le nombre F_n de manières de recouvrir un rectangle de dimensions $2 \times n$ avec des petits reclangles 2×1 ou 1×2.
Indication : former une relation de récurrence.

7 Formule d'inversion de Pascal et nombre de surjections

1. **Formule d'inversion de Pascal** [1] : On veut démontrer que, si $u_0, \dots, u_N, v_0, \dots, v_N \in \mathbb{K}$,

$$\left(\forall n \leqslant N,\ u_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} v_k\right) \iff \left(\forall n \leqslant N,\ v_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} u_k\right)$$

   En remarquant que $X^n = ((1+X)-1)^n$, montrer que $\displaystyle\sum_{k=j}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k}\binom{k}{j}$ vaut 1 si $j = n$ et 0 si $0 \leqslant j < n$.

   En déduire le résultat.

2. On note $S_{p,n}$ le nombre de surjections d'un ensemble de cardinal p dans un ensemble de cardinal n.
   (a) Calculer $S_{n,n}$ et $S_{p,n}$ pour $p < n$.

   On suppose désormais que $p \geqslant n$.

   (b) Quel est le nombre d'applications d'un ensemble de cardinal p dans un ensemble de cardinal n ?
   (c) Montrer que $n^p = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} S_{p,k}$.
   (d) Utiliser la formule de Pascal pour prouver que $S_{p,n} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^p$.

3. Dénombrabilité

8 Montrer que $\mathbb{N}^{(\mathbb{N})}$ (suites presque nulles, donc nulle à partir d'un certain rang) est dénombrable mais pas $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

9 L'ensemble des nombres complexes de module 1 est-il dénombrable ?

L'ensemble des racines de l'unité (i.e. l'ensemble des z dans $\mathbb{C}$ tels qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ vérifiant $z^n = 1$) l'est-il ?

Solution de 9 :

L'ensemble des nombres complexes de module 1 distincts de -1 est en bijection avec $]-\pi, \pi[$, donc avec $\mathbb{R}$, donc n'est pas dénombrable. L'ensemble des racines de l'unité, réunion dénombrable d'ensembles finis, est fini ou dénombrable, et n'est pas fini, donc est dénombrable.

4. Familles sommables

10 Montrer que la famille $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de réels positifs est sommable si et seulement si $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_{-n}$ le sont et, lorsque c'est le cas, $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=1}^{+\infty} u_{-n}$.

1. Pour d'autres preuves, voir par exemple https://fr.wikiversity.org/wiki/Formule_d%27inversion_de_Pascal

Solution de 10 :

Théorème de sommation par paquets avec $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \sqcup \mathbb{Z}_*^-$.

11 Pour quelles valeurs des nombres complexes a et b la famille $\left(a^m b^n\right)_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ est-elle sommable ? Calculer alors sa somme.

12 En utilisant la famille $\left(x^{n+p}\right)_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$, montrer que, si $|x|<1$, $\dfrac{1}{(1-x)^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)x^n$.

Résultat qui s'obtient plus naturellement par utilisation des séries entières.

13 Les familles suivantes sont-elles sommables sur $\mathbb{Z}$? Si oui, calculer leur somme.

1. $\left(\dfrac{n}{n^2+1}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$
2. $\left(\dfrac{1}{\left(n-\frac{1}{2}\right)^3}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$
3. $\left(\dfrac{e^{inx}}{2^{|n|}}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$
4. $\left(2^{n-2|n|}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$

14 Démontrer que, si x est élément de $[0,1[$, que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{1+x^n} = \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p x^{p+1}}{1-x^{p+1}}$

Solution de 14 :

Comme $x\in[0,1[$, pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a $x^n\in[0,1[$, ce qui autorise l'écriture

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{1+x^n} = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p x^{n(p+1)}\right)$$

On pose alors, pour tout $(n,p)\in\mathbb{N}_*\times\mathbb{N}$,

$$u_{n,p} = (-1)^p x^{n(p+1)}$$

et on montre la sommabilité de cette famille (en n'oubliant pas les valeurs absolues !), ce qui permet d'intervertir et d'obtenir le résultat.

15 Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $u_n = \dfrac{1}{2^n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{4^k}{k!}$.

1. (a) Écrire $\sum u_n$ comme le produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes.
   (b) En déduire que la série $\sum u_n$ converge et calculer sa somme.
2. Pour tout $(n,k)\in\mathbb{N}$, on note $a_{n,k}$ le réel valant $\dfrac{4^k}{2^n k!}$ si $k\leqslant n$ et 0 sinon.

   À l'aide du théorème de Fubini, montrer que $(a_{k,n})_{(n,k)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable et retrouver $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}u_n$.

16 **Mines**

Discuter, suivant les valeurs du réel α, la sommabilité de $\left(\dfrac{1}{(m+n)^\alpha}\right)_{(m,n)\in\mathbb{N}_*^2}$ puis celle de $\left(\dfrac{1}{(m^2+n^2)^\alpha}\right)_{(m,n)\in\mathbb{N}_*^2}$

Solution de 16 : Mines

Pour la première, l'introduction du recouvrement disjoint définie par les

$$J_p = \{(m,n)\ ;\ m+n=p\}$$

est judicieuse, et mène assez rapidement au résultat : la famille est sommable si et seulement si $\alpha > 2$. Pour la deuxième, la même idée (considérer les

$$I_p = \{(m,n)\ ;\ m^2+n^2=p\}$$

n'est pas efficace (quand $I_p \neq \varnothing$, on ne sait pas trop bien évaluer son cardinal, ce n'est pas qu'il n'y ait pas de résultats mais ils ne sont pas facilement à notre portée). On reprend donc les démarches classiques : comme les termes sont positifs, on peut écrire par le théorème de Fubini positif

$$\sum_{(m,n)\in\mathbb{N}_*^2} \frac{1}{(m^2+n^2)^\alpha} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{(m^2+n^2)^\alpha}\right)$$

dans $[0,+\infty]$.

On fixe $n \in \mathbb{N}$. $0 \leqslant \dfrac{1}{(m^2+n^2)^\alpha} \underset{m\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{m^{2\alpha}}$ donc $\displaystyle\sum_m \frac{1}{(m^2+n^2)^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > \dfrac{1}{2}$.

Lorsque c'est le cas, on pose $u_n = \displaystyle\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{(m^2+n^2)^\alpha}$.

On cherche une condition sur α pour que la série $\sum u_n$ converge.

On compare à une intégrale, par décroissance et continuité de $t \mapsto \dfrac{1}{(t^+n^2)^\alpha}$ sur $[1,+\infty[$.

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{(t^2+n^2)^\alpha}\,\mathrm{d}t \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{(1+n^2)^\alpha} + \int_1^{+\infty} \frac{1}{(t^2+n^2)^\alpha}\,\mathrm{d}t$$

Or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{(t^+n^2)^\alpha}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n^{2\alpha}}\int_1^{+\infty} \frac{1}{\left(\left(\frac{t}{n}\right)^2+1\right)^\alpha}\,\mathrm{d}t \underset{t=nu}{=} \frac{1}{n^{2\alpha-1}}\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty} \frac{1}{(u^2+1)^\alpha}\,\mathrm{d}t \sim \frac{1}{n^{2\alpha-1}}\int_0^{+\infty} \frac{1}{(u^2+1)^\alpha}\,\mathrm{d}t.$

Comme $\dfrac{1}{(1+n^2)^\alpha} = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^{2\alpha-1}}\right)$, on en déduit que $u_n \sim \dfrac{C}{n^{2\alpha-1}}$ avec $C = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(u^2+1)^\alpha}\,\mathrm{d}t$.

Et donc il y a sommabilité si et seulement si $\alpha > \dfrac{1}{2}$ et $2\alpha-1>1$ si et seulement si $\alpha > 1$.

Autre méthode : remarquer que $\dfrac{1}{2}(m+n)^2 \leqslant m^2+n^2 \leqslant (m+n)^2$.

On a alors, pour $\alpha \geqslant 0$, $\dfrac{2^\alpha}{(m+n)^{2\alpha}} \leqslant \dfrac{1}{(m^2+n^2)^\alpha} \leqslant \dfrac{1}{(m+n)^{2\alpha}}$.

Or, en sommant par diagonales. $I_p = \left\{(m,n)\in\mathbb{N}_*^2,\ m+n=p\right\}$ forme un recouvrement disjoint de $\mathbb{N}_*^2$ avec $|I|_p = p-1$. Donc

$$\sum_{(m,n)\in I_p} \frac{1}{(m+n)^{2\alpha}} = \frac{\left|I_p\right|}{p^{2\alpha}} = \frac{p-1}{p^{2\alpha}} \sim \frac{1}{p^{2\alpha-1}}$$

terme général de série convergente si et seulement si $\alpha > 1$, ce qui permet de retrouver le résultat.

On rappelle la définition de la fonction ζ, classique mais hors programme :

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$$

17 Montrer que la famille $\left(\frac{1}{m^2n^2}\right)_{(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable et, en utilisant $\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}$ et $\zeta(4)=\frac{\pi^4}{90}$, calculer les sommes

1. $\displaystyle\sum_{(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2}\frac{1}{m^2n^2}$
2. $\displaystyle\sum_{\substack{(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2\\ m|n}}\frac{1}{m^2n^2}$
3. $\displaystyle\sum_{\substack{(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2\\ m\wedge n=1}}\frac{1}{m^2n^2}$

18 **Mines**

Démontrer que les deux séries $\sum_{k\geqslant 2}\big(\zeta(k)-1\big)$ et $\sum_{k\geqslant 2}(-1)^k\big(\zeta(k)-1\big)$ convergent, et calculer leurs sommes.

Solution de 18 : Mines

Remarquer que $\zeta(k)-1=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^k}$ et utiliser Fubini.

19 **Écrt CCINP** Pour tout élément p de $\mathbb{N}^*$, on définit $J_p=\{(m,n)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*,\ mn=p\}$.

Utiliser la famille (J_p) pour démontrer $\big(\zeta(s)\big)^2=\sum_{p\geqslant 1}\frac{n_p}{p^s}$ où s est un réel strictement supérieur à 1, n_p désignant pour tout p le nombre de diviseurs de p.

Solution de 19 : Écrt CCINP

On considère la famille

$$\left(\frac{1}{m^sn^s}\right)$$

qui est, si $s>1$, facilement sommable, de somme $\zeta(s)^2$ (c'est une « famille produit »). Mais d'autre part, $\{J_p\ ;\ p\geqslant 1\}$ forme un recouvrement disjoint de $(\mathbb{N}^*)^2$, qu'on peut utiliser pour sommer la famille. Le résultat se trouve alors sans difficulté à condition de noter que n_p est le cardinal de J_p.