1. Dénombrement

1 Nombre de dérangements

1. Soit d_n le nombre de permutations de $\mathfrak{S}_n$ n'ayant pas de point fixe (appelées **dérangements**). On pose $d_0 = 1$. Montrer que $n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_{n-k}$. En déduire que $d_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.
2. Montrer, sans utiliser la question précédente, que pour tout $n \geqslant 2$, $d_{n+1} = n(d_n + d_{n-1})$. En déduire que $d_n = n d_{n-1} + (-1)^n$ puis retrouver la formule donnant d_n.

Solution de 1 : Nombre de dérangements

FGN 6 1.8 et 1.9

1. On partitionne les permutations de $\mathfrak{S}_n$ en fonction du nombre de points fixes k, et on obtient la première formule. On calcule alors

$$n!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k(n-k)! = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k\sum_{j=0}^{n-k}\binom{n-k}{j}d_j = \sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{k=0}^{n-j}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{n-k}{j}\right)d_j$$

Or, en utilisant les factorielles, on montre aisément que $\binom{n}{k}\binom{n-k}{j} = \binom{n}{j}\binom{n-j}{k}$ ce qui termine le calcul

$$n!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!} = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\left(\sum_{k=0}^{n-j}(-1)^k\binom{n-j}{k}\right)d_j = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}0^{n-j}d_j = d_n$$

2. On partitionne les dérangements σ de $\mathfrak{S}_{n+1}$ en fonction de la valeur de $\sigma(n+1) = k \in [\![1,n]\!]$. On note F_k l'ensemble de telles permutations.
On montrer que $|F|_k = d_n + d_{n-1}$ et écrivant $F_k = G_k \sqcup \overline{G_k}$ où G_k est l'ensemble des σ de F_k telles que $\sigma(k) = n+1$.
On a facilement $|G|_k = d_{n-1}$ (car alors σ est déterminé par le dérangement des entiers $1,\dots,k-1,k+1,\dots,n$) et, si $\sigma \in \overline{G_k}$, on note $j = \sigma^{-1}(n+1) \neq k$ et on considère le dérangement $\rho = \left(\sigma\circ(j\ n+1)\right)_{|[\![1,n]\!]}$ (on fixe $n+1$ puis on s'en débarrasse...) de $\mathfrak{S}_n$. $\sigma \mapsto \rho$ est une bijection et $\left|\overline{G_k}\right| = d_n$.
Cela permet de conclure $d_{n+1} = n(d_n + d_{n-1})$.
La formule suivante s'obtient par récurrence sur n.
En divisant par $n!$, on fait apparaître un télescopage et la formule donnant d_n.

2 Formule du crible

1. Soient $A_1,\dots,A_n$ des ensembles finis. Montrer que

$$|A_1\cup\cdots\cup A_n| = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n}\left|A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k}\right| = \sum_{\varnothing\neq I\in\mathscr{P}([\![1,n]\!])}(-1)^{|I|+1}\left|\bigcap_{i\in I}A_i\right|.$$

2. Retrouver une formule donnant le nombre de surjection de $[\![1,p]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$ en utilisant la formule du crible.
3. Retrouver une formule donnant le nombre de dérangements de $\mathfrak{S}_n$ en utilisant la formule du crible.

Solution de 2 : Formule du crible

1. On considère, avec $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, l'application

$$\mathbb{1}_A = 1 - \mathbb{1}_{\overline{A}} = 1 - \prod_{i=1}^{n}\left(1 - \mathbb{1}_{A_i}\right) = -\sum_{\varnothing \neq I \in \mathscr{P}([\![1,n]\!])} (-1)^{|I|}\mathbb{1}_{A_i} = \sum_{\varnothing \neq I \in \mathscr{P}([\![1,n]\!])} (-1)^{|I|-1}\mathbb{1}_{A_i}.$$

   En évaluant et sommant de part et d'autre pour $x \in A$, on obtient la formule.

2. Soit A_k l'ensemble des applications de $[\![1,p]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$ n'atteignant pas la valeur k.

   L'ensemble E des surjections de $[\![1,p]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$ est le complémentaire de $\bigcup_{k=1}^{n} A_k$, d'où

$$S_{p,n} = n^p - \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\binom{n}{k}(n-k)^p = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(n-k)^p = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}k^p$$

   car pour chacune des $\binom{n}{k}$ parties à k éléments de $[\![1,n]\!]$, le nombre d'applications ne prenant pas ces k valeurs fixées de $[\![1,n]\!]$ est $(n-k)^p$

   On ne dispose pas de formule close pour $S_{p,n}$.

3. Pour les dérangements, il suffit de même de considérer A_i l'ensemble des permutations fixant l'entier i.

3 Nombre de permutation de $\mathfrak{S}_n$ involutives

Déterminer, sous forme de somme, le nombre de permutation de $\mathfrak{S}_n$ involutives (c'est-à-dire étant leur propre inverse).

Solution de 3 : Nombre de permutation de $\mathfrak{S}_n$ involutives

FGN 6 1.7

On note I_n ce nombre.

Une involution est uniquement déterminée par sa décomposition en cycles à supports disjoints qui sont en fait des transpositions à supports disjoints.

Si elles sont au nombre de k, elle contiennent $2k$ entiers distincts qu'on choisit de $\binom{n}{2k}$ manières différentes.

En supposant les transpositions ordonnées, on a $\binom{2k}{2}\binom{2k-2}{2}\cdots\binom{2}{2}$ choix possible pour ces transpositions, que l'on peut permuter de $k!$ façons.

Ainsi, $I_n = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor} \frac{\binom{n}{2k}\binom{2k}{2}\binom{2k-2}{2}\cdots\binom{2}{2}}{k!} = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor} \frac{n!}{(n-2k)!k!2^k}$.

4 Partitions d'un entier

1. Déterminer
   - ★ le nombre a_n d'écritures possibles de n comme somme d'au moins un entier naturel non nuls (l'ordre étant important).
   - ★ le nombre $b_{n,k}$ d'écritures possibles de n comme somme d'exactement $k \in \mathbb{N}^*$ entiers naturels non nuls (l'ordre étant important).
   - ★ le nombre $c_{n,k}$ d'écritures possibles d'entiers entre 1 et n comme somme d'exactement $k \in \mathbb{N}^*$ entiers naturels non nuls (l'ordre étant important).
2. Soit $n, k \in \mathbb{N}$. Déterminer le nombre $N_{n,k}$ d'écritures de n comme somme de k entiers naturels (éventuellement nuls, donc).

Solution de 4 : Partitions d'un entier

1. FGN 6 1.15
   On fait une disjonction de cas suivant le premier terme de la somme qui est un entier entre 1 et n : on obtient alors $a_n = 1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} = 2a_{n-1}$ et comme $a_1 = 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = 2^{n-1}$.
   Pour $b_{n,k}$, imaginons notre entier n représenté sous forme d'une suite de n « $\circ$ » : $\circ\circ\circ\circ\circ\circ$ pour $n = 6$.
   Il faut alors place $k-1$ signes « | » parmi les $n-1$ espaces entre deux $\circ$.
   Exemple pour $k = 2$: $\circ\circ|\circ\circ\circ|\circ$ représente $2+3+1 = 6$.
   On obtient $b_{n,k} = \binom{n-1}{k-1}$. En sommant sur k, cela permet de retrouver la valeur de a_n.
   En sommant pour j entre k et n les $b_{j,k}$, on obtient $c_{n,k} = \binom{n}{k}$. Comment l'obtenir directement par dénombrement ?!?
2. $N_{n,k}$ correspond au nombre de façon de placer $k-1$ « | » (les signes +) parmi n « $\circ$ » : par exemple, $7 = 1+0+0+1+2+0+2$ correspond à $\circ|||\circ|\circ\circ||\circ\circ$.
   La différence avec le cas précédent est qu'on peut avoir plusieurs | successifs ici.
   Il s'agit donc du nombre de mots de $n+k-1$ lettres sur l'alphabet contenant les deux lettres « | » ou « $\circ$ » avec exactement $p-1$ « | ».
   Cela se dénombre en plaçant les « | » : $\binom{n+k-1}{k-1}$ possibilités, le reste étant des « $\circ$ ».
   On peut aussi commencer par placer les « $\circ$ » : $\binom{n+k-1}{n}$ possibilités.
   Donc $N_{n,k} = \binom{n+k-1}{k-1} = \binom{n+k-1}{n}$.

2. Dénombrabilité

5 On dit qu'un nombre complexe est algébrique lorsqu'il est racine d'un polynôme non nul à coefficients entiers. Montrer que l'ensemble des nombres algébriques est dénombrable.
Il y a donc beaucoup de nombres transcendants.

Solution de 5 :
Soit $A_{n,p}$ l'ensemble des racines des polynômes non nuls de degré $\leqslant n$ dont les coefficients sont des entiers compris entre $-p$ et p. $A_{n,p}$ est fini (on a un nombre fini de polynômes, chacun ayant un nombre fini de racines). Or l'ensemble des nombres complexes algébriques est

$$\bigcup_{(n,p)\in\mathbb{N}^2} A_{n,p}$$

et donc, réunion dénombrable d'ensembles finis, est fini ou dénombrable. Comme il n'est pas fini du tout...

6 Montrer que l'ensemble des extractrices n'est pas dénombrable.
Peut-on dire que l'ensemble des suites extraites d'une suite donnée n'est jamais dénombrable ?

Solution de 6 :
Argument diagonal de Cantor.
Sinon, on numérote $\phi_1, \phi_2, \ldots$ les extractrices.
Et on pose ψ strictement croissante telle que pour tout n, $\psi(n) \neq \phi_n(n)$ qui est distincte de toutes les autres.

7 ENS Ulm L'ensemble $\mathfrak{S}(\mathbb{N})$ des permutations de $\mathbb{N}$ est-il dénombrable ?

Solution de 7 : ENS Ulm

FGN 6 1.32

Non : on peut par exemple injecter $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ dans $\mathfrak{S}(\mathbb{N})$.

Si A partie de $\mathbb{N}$, on lui associe la bijection f_A qui échange $2k$ et $2k+1$ si $k \in A$ et laisse les autres entiers invariants. $A \mapsto f_A$ est injective (on retrouve A à partir de f_A en cherchant les entiers pairs non fixés par f_A), et la non dénombrabilité de $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ conclut.

Autre idée : encore essayer de s'inspirer du procédé diagonal de Cantor. On suppose que l'ensemble des bijections de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ est $\{f_n\ ;\ n \in \mathbb{N}\}$. On peut alors essayer de créer une bijection ϕ de $\mathbb{N}$ dans lui-même qui ne soit aucune des f_n. Utilisons un procédé du type diagonal de Cantor : on peut définir $\phi(0) \in \mathbb{N} \setminus \{f_0(0)\}$, $\phi(1) \in \mathbb{N} \setminus \{f_1(1), \phi(0)\}$, $\phi(2) \in \mathbb{N} \setminus \{f_2(2), \phi(0), \phi(1)\}$, etc...Mais, même si n'importe quelle construction comme celle-ci assure facilement l'injectivité de ϕ et le fait qu'elle soit différente de toutes les f_n, il n'est pas aisé de l'affiner pour assurer qu'elle soit surjective. On peut alors utiliser l'astuce suivante : construire ϕ sur les nombres pairs de façon à ce qu'elle soit injective et différente de toutes les f_n, en imposant de plus qu'elle soit à valeurs dans l'ensemble des nombres pairs. Il sera alors très facile de définir ϕ sur les impairs, pour qu'elle soit finalement bijective.

Pour cela, définissons $\mathbf{P}$ l'ensemble des nombres naturels pairs. On définit $\phi(0) \in \mathbf{P} \setminus \{f_0(0)\}$, puis $\phi(2) \in \mathbf{P} \setminus \{\phi(0), f_1(2)\}$, puis $\phi(4) \in \mathbf{P} \setminus \{\phi(0), \phi(2), f_2(4)\}$, etc... la construction rigoureuse étant assurée par récurrence :

$$\phi(2k)) \in \mathbf{P} \setminus \{\phi(0), \dots, \phi(2k-2), f_k(2k)\}$$

On définit ainsi une application injective sur $\mathbf{P}$, et différente de toutes les restrictions des f_n à $\mathbf{P}$. L'ensemble $\mathbb{N} \setminus \phi(\mathbf{P})$ est dénombrable (non fini) on peut définir une bijection de l'ensemble des nombres impairs sur $\mathbb{N} \setminus \phi(\mathbf{P})$, complétant ainsi ϕ en une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ qui n'est aucune des f_n.

Il y a beaucoup d'autres manières de faire cet exercice...

8 Théorème de Cantor-Bernstein

1. Soit E un ensemble et $\varphi : \mathscr{P}(E) \to \mathscr{P}(E)$ croissante pour l'inclusion.
   Montrer, en introduisant $A = \bigcup_{X \subset \varphi(X)} X$, que φ admet un point fixe.
2. Soient E et F deux ensembles. On suppose qu'il existe une injection $f : E \to F$ et une injection $g : F \to E$.
   En considérant l'application qui à $X \in \mathscr{P}(E)$ associe $E \setminus \big(g(F \setminus f(X))\big)$, montrer que E et F sont équipotents.

Solution de 8 : Théorème de Cantor-Bernstein

FGN 6 1.34

1. On montre que $\varphi(A) = A$. Notons $\mathscr{B} = \big\{X \in \mathscr{P}(E),\ X \subset \varphi(X)\big\}$.
   Remarquons que $X \in \mathscr{B} \Longrightarrow \varphi(X) \in \mathscr{B}$ par croissance de φ.
   Alors $\varphi(A) = \bigcup_{X \in \mathscr{B}} \varphi(X) \supset \bigcup_{X \in \mathscr{B}} X = A$ par définition de $\mathscr{B}$ puis de A.
   Et comme $\bigcup_{X \in \mathscr{B}} \varphi(X)$ est une réunion d'éléments de $\mathscr{B}$, elle est incluse dans $\bigcup_{X \in \mathscr{B}} X = A$.
2. Soit $\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(E) & \longrightarrow & \mathscr{P}(E) \\ X & \longmapsto & E \setminus \big(g(F \setminus f(X))\big) \end{array} \right.$
   Vérifions qu'elle est croissante pour l'inclusion.
   Si $X \subset X'$, $f(X) \subset f(X')$ donc $F \setminus f(X') \subset F \setminus f(X)$ puis $g(F \setminus f(X')) \subset g(F \setminus f(X))$ et enfin $\varphi(X) \subset \varphi(X')$.
   D'après la question précédente, φ possède un point fixe $A \in \mathscr{P}(E)$. Alors $E \setminus A = g(F \setminus f(A))$.
   On peut alors partitionner E en A et A^c et F en $f(A)$ et $\big(f(A)\big)^c$.
   f induit une bijection $\tilde{f}$ de A sur $f(A)$ (elle est déjà injective, on la rend surjective.)
   g induit une bijection $\tilde{g}$ de $\big(f(A)\big)^c$ sur A^c (elle est déjà injective, on la rend surjective car $A^c = g(f(A)^c)$.)

On schématise :

$$E \quad : \quad \begin{array}{|c|}\hline A \\ \hline A^c \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{c} f \\ \longrightarrow \\ \longleftarrow \\ g \end{array} \quad \begin{array}{|c|}\hline f(A) \\ \hline f(A)^c \\ \hline \end{array} \quad : \quad F$$

On peut alors définir une fonction $h : E \to F$ tel que $h(x) = \tilde{f}(x)$ si $x \in A$ et $\tilde{g}^{-1}(x)$ sinon qui est une bijection de réciproque $h^{-1} : F \to E$ tel que $h^{-1}(y) = \tilde{f}^{-1}(y)$ si $y \in f(A)$ et $\tilde{g}(y)$ sinon.

3. Sommabilité

9 **Centrale** Montrer que la famille $\left(\dfrac{1}{pq(p+q-1)}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}_*^2}$ est sommable et calculer sa somme.

Solution de 9 : Centrale

Remarquons qu'il s'agit d'une famille de réels positifs, ce qui simplifie les choses (on va sans doute faire de la sommabilité-sommation par paquets, le tout en même temps, alors que pour une famille quelconque de réels ou de complexes il faudrait traiter la sommabilité d'abord, s'occuper de la sommation ensuite.

Définissons, si $(p,q) \in \mathbb{N}_*^2$,

$$u_{p,q} = \frac{1}{pq(p+q-1)}$$

et remarquons que pour tout $p \geqslant 1$, $\sum_q u_{p,q}$ converge (comparaison à une série de Riemann). Par ailleurs, si $p \geqslant 2$, une décomposition en éléments simples donne

$$\frac{1}{q(p+q-1)} = \frac{1}{p-1}\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{q+p-1}\right)$$

Donc, si $N > p-1$, en « télescopant » les termes :

$$\sum_{q=1}^{N} \frac{1}{q(p+q-1)} = \frac{1}{p-1}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{p-1} - \frac{1}{N+1} - \cdots - \frac{1}{N+p-1}\right)$$

D'où l'on tire

$$\sum_{q=1}^{+\infty} u_{p,q} = \frac{1}{p(p-1)} H_{p-1}$$

si $p \geqslant 2$ (H_n désignant la somme partielle de rang n de la série harmonique). Or la série de terme général $\dfrac{1}{p(p-1)} H_{p-1}$ converge (il suffit pour cela d'avoir une majoration de H_n par quelque chose de l'ordre de $\ln n$, par comparaison série-intégrale, puis d'utiliser les croissances comparées pour voir par exemple que $\dfrac{1}{p(p-1)} H_{p-1} \underset{p\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{p^{3/2}}\right)$). On a déjà la sommabilité. Maintenant, si $N \geqslant 2$,

$$\sum_{p=2}^{N} \frac{1}{p(p-1)} H_{p-1} = \sum_{p=2}^{N} \left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p}\right) H_{p-1}$$

ce qui donne l'idée d'une sommation « abélienne » :

$$\begin{aligned}\sum_{p=2}^{N}\frac{1}{p(p-1)}H_{p-1} &= \sum_{p=2}^{N}\left(\frac{1}{p-1}-\frac{1}{p}\right)H_{p-1}\\ &= \sum_{p=2}^{N}\frac{H_{p-1}}{p-1}-\sum_{p=2}^{N}\frac{H_{p-1}}{p}\\ &= \sum_{p=1}^{N-1}\frac{H_p}{p}-\sum_{p=2}^{N}\frac{H_{p-1}}{p}\\ &= 1-\frac{H_{N-1}}{N}+\sum_{p=2}^{N-1}\frac{1}{p^2}\end{aligned}$$

D'où l'on tire

$$\sum_{p=2}^{+\infty}\left(\sum_{q=1}^{+\infty}u_{p,q}\right)=\frac{\pi^2}{6}$$

et donc la somme de la famille : $\dfrac{\pi^2}{3}$.

On aurait pu aussi essayer la partition de $\mathbb{N}_*^2$ par les

$$J_m=\{(p,q)\ ;\ p+q=m\}$$

mais ce n'est sans doute pas mieux.

---

10 **Mines** On admet que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$. Montrer que la famille $\left(\dfrac{(-1)^{mn}}{m^2n^2}\right)_{(m,n)\in\mathbb{N}_*^2}$ est sommable et calculer sa somme.

Solution de 10 : Mines

Posons $u_{m,n}=\dfrac{(-1)^{mn}}{m^2n^2}$ et montrons la sommabilité de la famille $\left(u_{m,n}\right)_{(m,n)\in\mathbb{N}_*^2}$. On note que, pour tout $n\geqslant 1$, $\sum_m |u_{m,n}|$ converge, et

$$s_n=\sum_{m=1}^{+\infty}|u_{m,n}|=\frac{\pi^2}{6n^2}$$

Donc $\sum_n s_n$ converge, ce qui assure la sommabilité de $(u_{m,n})$, et permet de dire que sa somme vaut

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{mn}}{m^2n^2}\right)$$

Déjà, si n est pair :

$$\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{mn}}{m^2n^2}=\frac{\pi^2}{6n^2}$$

Ensuite, si n est impair,

$$\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{mn}}{m^2n^2}=\frac{1}{n^2}\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{(-1)^m}{m^2}$$

Mais, d'une part, (toutes les séries écrites ci-dessous convergent par comparaison à l'exemple de Riemann, on a donc le droit d'écrire ce qu'on écrit)

$$\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{(-1)^m}{m^2}=\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{4p^2}-\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2}$$

et d'autre part

$$\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{m^2}=\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{4p^2}+\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2}$$

Donc

$$\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{(-1)^m}{m^2}=\frac{\pi^2}{24}-\left(\frac{\pi^2}{6}-\frac{\pi^2}{24}\right)=-\frac{\pi^2}{12}$$

La somme cherchée vaut donc (toujours en séparant les termes d'indices pairs et ceux d'indices impairs, les séries convergeant toutes par référence à Riemann)

$$\frac{\pi^2}{6}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{4p^2}-\frac{\pi^2}{12}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2}$$

Remarquons alors que plus haut on a obtenu sans le mentionner au passage que

$$\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$$

Et finalement la somme cherchée vaut

$$\pi^4\left(\frac{1}{6\times4\times6}-\frac{1}{12\times8}\right)$$

et donc peut-être $-\dfrac{\pi^4}{288}$?

On aurait pu envisager de partitionner $\mathbb{N}_*^2$ avec les

$$J_p=\{(m,n)\ ;\ mn=p\}$$

mais le calcul n'aboutit pas, faute de pouvoir écrire simplement le cardinal de J_p.

11 **X-ENS** Pour $n\geqslant 2$, on note q_n le plus grand diviseur premier de n.

Quelle est la nature de la série de terme général $\dfrac{1}{nq_n}$?

Solution de 11 : X-ENS

FGN 6 : 2.3

Notons $(p_k)_{k\geqslant1}$ la suite croissante des nombres premiers. On effectue une sommation par paquets suivant la valeur de q_n.

Soit, pour $k\geqslant 1$, $I_k=\{n\in\mathbb{N}^*,\text{ le plus grand diviseur premier de } n \text{ est } p_k\}$. Alors $\mathbb{N}^*\setminus\{1\}=\bigsqcup_{k\geqslant1} I_k$.

On a alors, dans $[0,+\infty]$, en remarquant que $I_k=\{p_1^{\alpha_1}\cdots p_k^{\alpha_k+1},\ (\alpha_1,\dots,\alpha_k)\in\mathbb{N}^k\}$,

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{nq_n}=\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{n\in I_k}\frac{1}{nq_n}=\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{(\alpha_1,\dots,\alpha_k)\in\mathbb{N}^k}\frac{1}{p_1^{\alpha_1}\cdots p_k^{\alpha_k+2}}=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{M_k}{p_k^2}$$

où

$$M_k=\sum_{(\alpha_1,\dots,\alpha_k)\in\mathbb{N}^k}\frac{1}{p_1^{\alpha_1}}\cdots\frac{1}{p_k^{\alpha_k}}=\prod_{i=1}^{k}\left(\sum_{\ell=0}^{+\infty}\frac{1}{p_i^{\ell}}\right)=\prod_{i=1}^{k}\left(1-\frac{1}{p_i}\right)^{-1}$$

On cherche à majorer M_k pour avoir la nature de la série de terme général $\dfrac{M_k}{p_k^2}$.

$$\ln M_k=-\sum_{i=1}^{k}\ln\frac{p_i-1}{p_i}=\sum_{i=1}^{k}\ln\left(1+\frac{1}{p_i-1}\right)\leqslant\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{p_i-1}$$

avec l'inégalité de concavité classique sur le $\ln$.

Comme $p_i\geqslant 2i-1$, il vient $\ln M_k\leqslant 1+\dfrac{H_{k-1}}{2}\leqslant\dfrac{2}{3}\ln k$ si k assez grand, donc $M_k\leqslant k^{2/3}$ ce qui permet de conclure que $\dfrac{M_k}{p_k^2}=\mathcal{O}\left(\dfrac{1}{k^{4/3}}\right)$ et d'obtenir la convergence de la série initiale.

12 Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite complexe sommable. On suppose que pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, on a $\sum_{n\geqslant 0} a_{kn}=0$ et on veut établir que (a_n) est la suite nulle.

1. Montrer que $a_0=0$.
2. On définit la fonction de Möbius $\mu:\mathbb{N}^*\to\mathbb{Z}$ par $\mu(1)=1$, $\mu(p_1\cdots p_s)=(-1)^s$ si $p_1,\dots,p_s$ sont premiers distincts, $\mu(n)$ dans les autres cas. Calculer $\sum_{d|n}\mu(d)$ pour $n\in\mathbb{N}^*$.
3. Conclure en exploitant la relation $0=\sum_{d|n}\left(\sum_{m\geqslant 0} a_{dm}\right)\mu(d)$.

Solution de 12 :

FGN 6 : 2.14

1. On tire parti du fait que a_0 est dans toutes les sommes. Comme la série de terme général a_n est absolument convergente, le reste $R_n=\sum_{p=n+1}^{+\infty}\left|a_p\right|\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$.

   Or pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $|a_0|=\left|\sum_{n=1}^{+\infty}a_{kn}\right|\leqslant\sum_{n=1}^{+\infty}|a_{kn}|\leqslant R_{k-1}\xrightarrow[k\to+\infty]{}0$ donc $a_0=0$.
2. Les terme non nuls de $\sum_{d|n}\mu(d)$ sont ceux pour d de la forme $p_1\cdots p_s$ produit de nombres premiers distincts deux à deux. Notons $p_1,\dots,p_k$ les diviseurs premiers de n.

   Combien y a-t-il de diviseur de n de la forme précédente avec s termes ? Il faut choisir s diviseurs premiers parmi les k, on a donc $\binom{k}{s}$ choix possibles.

   Donc $\sum_{d|n}\mu(d)=\sum_{s=0}^{k}\binom{k}{s}(-1)^s=(1-1)^k=\delta_{n,1}$.
3.

---

13 **Classique** Soit $s\geqslant 1$.

1. Montrer que la suite double $\left(2^{-sm}3^{-sn}\right)_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable. Calculer sa somme, que l'on notera S.
2. Montrer que si $s>1$, alors $S<\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^s}$ puis que si $s\geqslant 1$, alors $S>\sum_{k=1}^{5-1}\frac{1}{k^s}$.
3. Montrer que la suite triple $\left(2^{-sn_1}3^{-sn_2}5^{-sn_3}\right)_{(n_1,n_2,n_3)\in\mathbb{N}^3}$ est sommable. Calculer sa somme, que l'on notera S_3.
4. Montrer que si $s>1$, alors $S_3<\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^s}$ puis que si $s\geqslant 1$, alors $S_3>\sum_{k=1}^{7-1}\frac{1}{k^s}$.
5. Pour $s>1$, étendre les résultats précédents et justifier la formule $\prod_{p\in\mathscr{P}}\frac{1}{1-p^{-s}}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^s}$ où $\mathscr{P}$ désigne l'ensemble des nombres premiers.
6. Pour $s=1$, étendre les résultats précédents et montrer que $\sum_{p\in\mathscr{P}}\frac{1}{p}=+\infty$.

Solution de 13 : Classique

1. Montrer que la suite double $\left(2^{-sm}3^{-sn}\right)_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable. Calculer sa somme, que l'on notera S.
Définissons, si $(m,n)\in\mathbb{N}^2$,
$$u_{m,n}=2^{-sm}3^{-sn}$$
La famille $\left(u_{m,n}\right)_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ est à termes réels positifs. On peut lui appliquer le critère de sommabilité des familles produits (voir plus haut), mais il n'est pas explicitement au programme, et de toute façon est suffisamment simple pour qu'on le retrouve à chaque fois. On dira donc, par exemple :
• Pour tout $m\in\mathbb{N}$, $\sum_n u_{m,n}$ converge (car $0\leqslant 3^{-s}<1$), et
$$\sigma_m=\sum_{n=0}^{+\infty}u_{m,n}=2^{-sm}\frac{1}{1-3^{-s}}$$
• $\sum_m \sigma_m$ converge, et
$$\sum_{m=0}^{+\infty}\sigma_m=\frac{1}{1-2^{-s}}\times\frac{1}{1-3^{-s}}$$
On a donc la sommabilité, et la somme
$$S=\frac{1}{1-2^{-s}}\times\frac{1}{1-3^{-s}}$$
2. On suppose $s>1$. Montrer que
$$S<\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^s}$$
L'application $\phi\ :\ \mathbb{N}^2\longrightarrow\mathbb{N}_*$ définie par $\phi(m,n)=2^m\times 3^n$ est injective (arithmétique...). Notons $\phi(\mathbb{N}^2)=I$ (I est l'ensemble constitué des entiers naturels non nuls qui ne sont divisibles par aucun nombre premier >3). Alors
$$S=\sum_{k\in I}\frac{1}{k^s}$$
(c'est une conséquence de la commutativité de la sommabilité). On en déduit, comme $I\subset\mathbb{N}^*$, le résultat.
3. On suppose $s\geqslant 1$. Montrer que
$$S>\sum_{k=1}^{5-1}\frac{1}{k^s}$$
Ici, en reprenant les notations précédentes, il suffit de remarquer que $[\![1,5-1]\!]\subset I$.
4. Montrer que la suite triple $\left(2^{-sn_1}3^{-sn_2}5^{-sn_3}\right)_{(n_1,n_2,n_3)\in\mathbb{N}^3}$ est sommable. Calculer sa somme, que l'on notera S_3.
On considère par exemple, pour $p\in\mathbb{N}$,
$$I_p=\{(n_1,n_2,p)\ ;\ (n_1,n_2)\in\mathbb{N}^2\}$$
Il est assez clair que $\bigcup_{p=0}^{+\infty}I_p=\mathbb{N}^3$ et que les I_p sont deux à deux disjoints. Or, pour tout p, d'après **1.**, la famille $\left(2^{-sn_1}3^{-sn_2}5^{-sn_3}\right)_{(n_1,n_2,n_3)\in I_p}$ est sommable, de somme
$$\sigma_p=5^{-sp}\times\frac{1}{1-2^{-s}}\times\frac{1}{1-3^{-s}}$$
Or $\sum_p\sigma_p$ converge (car $5^{-s}\in[0,1[$), donc par théorème de sommabilité et sommation par paquets, la « suite triple » est sommable, de somme
$$S_3=\frac{1}{1-2^{-s}}\times\frac{1}{1-3^{-s}}\times\frac{1}{1-5^{-s}}$$

5. On suppose $s > 1$. Montrer que

$$S_3 < \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^s}$$

6. On suppose $s \geqslant 1$. Montrer que

$$S_3 > \sum_{k=1}^{7-1} \frac{1}{k^s}$$

Même raisonnement que plus haut, en considérant cette fois

$$\phi_3 : \mathbb{N}^3 \mapsto \mathbb{N}_*(n_1, n_2, n_3) 2^{n_1} 3^{n_2} 5^{n_3}$$

qui est injective, et en notant I_3 son image, qui est une partie de $\mathbb{N}^*$ contenant $[\![1, 7-1]\!]$ puisque I_3 est l'ensemble des naturels non nuls qui ne sont divisibles par aucun nombre premier > 5.

7. Pour $s > 1$, étendre les résultats précédents et justifier la formule

$$\prod_{p \in \mathscr{P}} \frac{1}{1 - p^{-s}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$$

où $\mathscr{P}$ désigne l'ensemble des nombres premiers.

On écrit $\mathscr{P} = \{p_k \ ; \ k \in \mathbb{N}_*\}$ avec $p_k < p_{k+1}$ (autrement dit on numérote l'ensemble des nombres premiers par ordre strictement croissant). Une récurrence sur N montre (même preuve de l'hérédité que le passage de 2 à 3, avec seulement des notations un peu plus pénibles) que la famille

$$\left(2^{-s n_1} \times 3^{-s n_2} \times \cdots \times p_N^{-s n_N}\right)_{(n_1, \dots, n_N) \in \mathbb{N}^N}$$

est sommable, et que sa somme vaut

$$S_N = \prod_{k=1}^{N} \frac{1}{1 - p_k^{-s}}$$

Et on a de plus

$$\sum_{k=1}^{p_{N+1}-1} \frac{1}{k^s} \leqslant S_N \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^s}$$

ce qui, par théorème d'encadrement, montre la formule demandée.

8. Pour $s = 1$, étendre les résultats précédents et montrer que

$$\sum_{p \in \mathscr{P}} \frac{1}{p} = +\infty$$

On a encore le droit d'écrire (les familles considérées ci-dessus sont sommables pour tout $s > 0$, pas seulement pour $s > 1$, car ce sont des familles produits de termes généraux de séries géométriques de raisons dans $[0, 1[$)

$$\sum_{k=1}^{p_{N+1}-1} \frac{1}{k} \leqslant \prod_{k=1}^{N} \frac{1}{1 - p_k^{-1}}$$

Par divergence de la série harmonique,

$$\prod_{k=1}^{N} \frac{1}{1 - p_k^{-1}} \xrightarrow[N \to +\infty]{} +\infty$$

Appliquant le logarithme, la série $\displaystyle\sum_k \ln(1 - 1/p_k)$ diverge. Et

$$\ln\left(1 - \frac{1}{p_k}\right) \underset{k \to +\infty}{\sim} -\frac{1}{p_k},$$

ce qui donne bien la divergence de $\displaystyle\sum_k \frac{1}{p_k}$.