Suites

1 **Oral Centrale** Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\gamma\in]-1,1[$. Montrer $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \quad\Longleftrightarrow\quad a_{n+1}-\gamma a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$

Indication : preuve type Cesàro...

Solution de 1 : Oral Centrale

Seule l'implication de droite à gauche est intéressante. Notons

$$u_n = a_{n+1}-\gamma a_n$$

et essayons d'exprimer a_n à l'aide des u_p (l'hypothèse est que la suite (u_n) converge vers 0) : $a_1 = u_0+\gamma a_0$, $a_2 = u_1+\gamma a_1 = u_1+\gamma u_0+\gamma^2 a_0$, puis, par récurrence :

$$a_n = u_{n-1}+\gamma u_{n-2}+\gamma^2 u_{n-3}+\cdots+\gamma^{n-1}u_0+\gamma^n a_0$$

Pour la suite de d'exercice, on constate que quand n est grand u_n et γ^n sont petits. Mais c'est quand même un peu délicat à écrire. Soit $\varepsilon>0$; soit p_0 tel que

$$\forall k\geqslant p_0 \qquad |u_k|\leqslant\varepsilon$$

et, d'autre part, soit M tel que $\forall k\in\mathbb{N}\quad |u_n|\leqslant M$ (la suite (u_n) converge, donc est bornée).

Supposons $n>p_0$; on peut alors majorer

$$|a_n|\leqslant\varepsilon(1+|\gamma|+\ldots+|\gamma|^{n-p_0-1})+M(|\gamma|^{n-p_0}+\cdots+|\gamma|^{n-1})+|a_0||\gamma|^n$$

et donc, en utilisant des sommes géométriques :

$$|a_n|\leqslant\frac{\varepsilon}{1-|\gamma|}+M\frac{|\gamma|^{n-p_0}}{1-|\gamma|}+|a_0||\gamma|^n$$

Comme $0\leqslant|\gamma|<1$, la suite $(|\gamma|^n)$ converge vers 0, il existe donc un rang n_0 à partir duquel

$$|a_n|\leqslant\frac{\varepsilon}{1-|\gamma|}+\frac{\varepsilon}{1-|\gamma|}$$

et au début, on aurait pu prendre $(1-|\gamma|)\varepsilon/2$ à la place de ε, on conclut.

2 **Oral Mines - Centrale - X** Soit, pour $n\geqslant 2$, $P_n = X^n-X-1$.

Démontrer que P_n a une unique racine réelle positive u_n. Démontrer que la suite (u_n) converge, et donner un développement asymptotique à trois termes de u_n (la limite étant le premier de ces trois termes).

Solution de 2 : Oral Mines - Centrale - X

P_n a pour limite $+\infty$ en $+\infty$. Elle est négative en 0, et continue, donc s'annule par théorème des valeurs intermédiaires. Elle ne s'annule qu'un nombre fini de fois, et donc a une plus grande racine réelle u_n.

$P_n(1) < 0$, $P_n' > 0$ sur $]1, +\infty[$, et, si $\varepsilon > 0$, à partir d'un certain rang $P_n(1+\varepsilon) > 0$ (croissances comparées). Donc, à partir d'un certain rang, $1 \leqslant u_n \leqslant 1+\varepsilon$. On en déduit

$$u_n = 1 + \mathrm{o}(1)$$

Écrivons alors $\varepsilon_n = u_n - 1 \to 0$. Comme

$$(1+\varepsilon_n)^n = 1 + \varepsilon_n + 1 = 2 + \varepsilon_n$$

il semble assez commode, pour développer, de prendre les logarithmes des deux membres (qui sont bien strictement positifs, au moins à partir d'un certain rang). On obtient

$$n \ln(1+\varepsilon_n) = \ln(2+\varepsilon_n) \tag{1}$$

Le premier membre de l'égalité est équivalent à $n\varepsilon_n$ (car $\varepsilon_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$), le second membre est équivalent à $\ln 2$ (car il tend vers cette limite, non nulle). Donc

$$\varepsilon_n \sim \frac{\ln 2}{n}$$

On obtient

$$u_n = 1 + \frac{\ln 2}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$$

et on en voudrait un peu plus. Développons donc (1) un peu plus loin :

$$n\varepsilon_n - n\frac{\varepsilon_n^2}{2} + \mathrm{o}\left(n\varepsilon_n^2\right) = \ln 2 + \frac{\varepsilon_n}{2} + \mathrm{o}(\varepsilon_n)$$

Mais l'équivalent trouvé plus haut nous permet d'affirmer que les deux o sont des $\mathrm{o}(1/n)$. Qui plus est,

$$n\varepsilon_n^2 \sim \frac{(\ln 2)^2}{n}$$

ce qui peut s'écrire

$$n\varepsilon_n^2 = \frac{(\ln 2)^2}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$$

Donc

$$n\varepsilon_n = \frac{(\ln 2)^2}{2n} + \ln 2 + \frac{\varepsilon_n}{2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{(\ln 2)^2}{2n} + \ln 2 + \frac{\ln 2}{2n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$$

On remet les choses en ordre, et on obtient :

$$u_n = 1 + \frac{\ln 2}{n} + \frac{(\ln 2)^2 + \ln 2}{2n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

3 **Oral Mines - Centrale - X** Soit, pour $n \geqslant 2$, $P_n = X^n - nX + 1$.

Démontrer que P_n a une plus grande racine réelle u_n. Démontrer que la suite (u_n) converge, et donner un développement asymptotique à deux termes de u_n (la limite étant le premier de ces deux termes).

Solution de 3 : Oral Mines - Centrale - X

P_n a pour limite $+\infty$ en $+\infty$. Elle est négative en 1, et continue, donc s'annule par théorème des valeurs intermédiaires. Elle ne s'annule qu'un nombre fini de fois, et donc a une plus grande racine réelle u_n.

On a d'autre part $u_n > 1$ dès que $n > 2$ car $P_n(1) = 2 - n < 0$.
On a $P_n'(x) = n(x^{n-1} - 1) > 0$ sur $]1, +\infty[$, et, si $\varepsilon > 0$, à partir d'un certain rang $P_n(1+\varepsilon) > 0$ (croissances comparées). Donc, à partir d'un certain rang, $1 \leqslant u_n \leqslant 1 + \varepsilon$. On en déduit

$$u_n = 1 + \mathrm{o}(1)$$

Écrivons alors $u_n = 1 + \varepsilon_n$. On a

$$(1+\varepsilon_n)^n = n(1+\varepsilon_n) - 1$$

Prenons les logarithmes des deux membres :

$$n\ln(1+\varepsilon_n) = \ln n + \ln(1 + \varepsilon_n - 1/n)$$

Le premier membre de l'égalité est équivalent à $n\varepsilon_n$ (car $\varepsilon_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$), le second membre est équivalent à $\ln n$. Donc

$$\varepsilon_n \sim \frac{\ln n}{n}$$

On obtient

$$u_n = 1 + \frac{\ln n}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{\ln n}{n}\right)$$

$\boxed{4}$ **Oral Mines - X** Soit, pour $n \geqslant 1$, $f_n \ : \ x \mapsto \sum_{k=1}^{n} x^k - 1$.

Montrer qu'il existe un unique réel strictement positif tel que $f_n(x_n) = 0$.
Étudier la suite (x_n) et en donner un développement asymptotique à deux termes.

Solution de 4 : Oral Mines - X

f_n est strictement croissante, vaut -1 en 0, a pour limite $+\infty$ en $+\infty$. D'où, par théorème des valeurs intermédiaires (il est clair que f_n est continue) l'existence et l'unicité de x_n. On constate que $x_n < 1$ si $n > 1$. Mais aussi,

$$f_n(x) = \frac{x - x^{n+1}}{1-x} - 1 = \frac{-1 + 2x - x^{n+1}}{1-x}$$

Donc

$$x_n^{n+1} = 2x_n - 1 \tag{1}$$

Soit $\alpha \in]0,1[$; $f_n(1-\alpha) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1-2\alpha}{\alpha}$. Donc, si $\alpha < 1/2$, à partir d'un certain rang on a $f_n(1-\alpha) > 0$, et donc $x_n < 1 - \alpha$. En fait, on aurait pu se contenter de remarquer que $f_n < f_{n+1}$ sur $\mathbb{R}_*^+$, ce qui donne $0 < f_{n+1}(x_n)$, et donc $x_{n+1} < x_n$ (variations de f_n). On a donc la convergence de (x_n) vers $\ell \in [0,1[$. Mais, dans (1), on a nécessairement $(2x_n - 1)$ qui converge vers 0 (le premier membre converge vers 0). Donc $\ell = 1/2$. Posons

$$x_n = \frac{1}{2} + \varepsilon_n$$

où (ε_n) converge vers 0. On a

$$(n+1)\ln\left(\frac{1}{2} + \varepsilon_n\right) = \ln(2) + \ln(\varepsilon_n)$$

qui donne déjà

$$\ln(\varepsilon_n) \sim -n\ln 2 \tag{2}$$

mais cela ne suffit pas (on ne peut pas prendre des exponentielles d'équivalents). Mais, repartant sur la relation (1) (sans prendre les logarithmes), on a

$$2\varepsilon_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \exp((n+1)\ln(1+2\varepsilon_n))$$

Mais $(n+1)\ln(1+2\varepsilon_n) \sim 2n\varepsilon_n$ et $n\varepsilon_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ (prendre le logarithme de $n\varepsilon_n$, (2) montre qu'il tend vers $-\infty$). On obtient

$$\varepsilon_n \sim \frac{1}{2^{n+2}}$$

ce qui donne le deuxième terme du développement asymptotique.

5 **Oral ENS** Caractériser les suites réelles $(u_n)_{n\geqslant 0}$ telles qu'il existe une permutation σ pour laquelle la suite $\left(u_{\sigma(n)}\right)_{n\geqslant 0}$ est monotone à partir d'un certain rang.

Solution de 5 : Oral ENS

Voir aussi FGN Analyse 1 – 2.2 On procède par Analyse-Synthèse.

Analyse Si on se donne une telle suite, alors, par théorème de la limite monotone, la suite $\left(u_{\sigma(n)}\right)_{n\geqslant 0}$ a une limite ℓ finie ou $\pm\infty$.

On montre que $u_n \to \ell$. Traitons le cas où $\ell \in \mathbb{R}$ (les autres cas se traitent de manière similaire).

Soit $\varepsilon > 0$. On a un rang $N \in \mathbb{N}$ à partir duquel $\left|u_{\sigma(n)} - \ell\right| \leqslant \varepsilon$.

Posons $N' = \max\limits_{0\leqslant k\leqslant N-1} \sigma(k)$. Alors pour $n > N'$, n s'écrit $\sigma(n')$ avec $n' \notin [\![0, N-1]\!]$, donc $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$.

De plus, à partir d'un certain rang, tous les $u_{\sigma(n)}$ se situe « du même côté » de cette limite, et même strictement si la suite n'est pas stationnaire.

Synthèse Soit (u_n) une suite ayant une limite ℓ dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Si la suite est stationnaire, $\sigma = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$ convient.

Sinon, supposons que tous les termes sont strictement du même côté que ℓ à partir du rang N.

On suppose par exemple que pour tout $n \geqslant N$, $u_n < \ell \in \mathbb{R}$.

L'idée va être de prendre des indices successifs pour lesquels on puisse écrire

$$\frac{1}{k+1} \leqslant \ell - u_n < \frac{1}{k}.$$

Soit pour $k \in \mathbb{N}^*$, $A_k = \left\{n \geqslant N,\ \ell - \dfrac{1}{k} < u_n \leqslant \ell - \dfrac{1}{k+1}\right\}$ et $A_0 = \{n \geqslant N,\ u_n \leqslant \ell - 1\}$. La convergence de (u_n) implique que tous ces ensembles soient finis, et ils partitionnent $[\![N, +\infty[$.

On peut alors définir la bijection σ en posant $\sigma(n) = n$ sur $[\![0, N-1]\!]$, puis en prenant les indices de A_0 classés par ordre croissant de u_n, puis ceux de A_1, et ainsi de suite.

Pour le cas où $\ell = +\infty$, il suffit de partitionner par exemple avec $\{n \geqslant N,\ k < u_n \leqslant k+1\}$.

Conclusion Les suites recherchées sont les suites stationnaires ou ayant une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$ et étant toujours strictement inférieur ou toujours strictement supérieur à cette limite.

6 **Oral X - Suites convexes bornées** On considère une suite de réels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on note pour $n \geqslant 0$, $\Delta u_n = u_n - u_{n+1}$ et $\Delta^2 u_n = \Delta u_n - \Delta u_{n+1}$. On suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Delta^2 u_n \geqslant 0$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et que $n\Delta u_n$ converge vers 0.
2. Montrer que la série $\sum (n+1)\Delta^2 u_n$ converge.

Solution de 6 : Oral X - Suites convexes bornées

Voir aussi FGN Analyse 1 – 2.5

1. Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Delta^2 u_n \geqslant 0$, la suite (Δu_n) est croissante.
   Comme u est bornée, Δu l'est aussi.
   Elle converge donc vers un réel ℓ.
   Pour faire apparaître un télescopage, on utilise le théorème de Cesàro appliqué à Δu, ce qui conduit à $\dfrac{u_0 - u_n}{n} \to \ell$.
   Le fait que u soit bornée impose que $\ell = 0$.
   Donc Δu tend vers 0 en décroissant et est donc positive : u décroît. Et comme elle est bornée, elle converge vers une limite ℓ'.
   Pour montrer que $n\Delta u_n \to 0$, on commence par s'intéresser à sa moyenne de Cesàro, et on pourra conclure grâce à la monotonie de Δu (la réciproque de Cesràro est vrai avec une hypothèse de monotonie !).
   On calcule $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} k\Delta u_k = \sum_{k=0}^{n-1} u_k - (n-1)u_n$ donc $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} k\Delta u_k = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u_k - \frac{n-1}{n} u_n \to \ell' - \ell' = 0$.
   Par décroissance de Δu, $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} k\Delta u_k \geqslant \frac{1}{n}\left(\sum_{k=0}^{n-1} k\right)\Delta u_n = \frac{n}{2}\Delta u_n \geqslant 0$ donc $n\Delta u_n \to 0$.
2. On calcule
$$\sum_{k=0}^{n}(k+1)\Delta^2 u_k = u_0 - u_{n+1} - (n+1)\Delta u_{n+1} \longrightarrow u_0 - \ell'.$$

7 **Oral X** Convergence et limite de $u_n = \dfrac{1}{n^n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^n$.

Solution de 7 : Oral X

Voir aussi FGN Analyse 1 – 2.17

On remarque que
$$u_n = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{n-k}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n-1}\left(1 - \frac{k}{n}\right)^n.$$

Comme $\left(1 - \dfrac{k}{n}\right)^n \to \mathrm{e}^{-k}$, on est tenté de penser que
$$u_n \to \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-k} = \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}.$$

Par l'inégalité de concavité classique $\ln(1+x) \leqslant x$, on a déjà
$$u_n \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{-k} \leqslant \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}$$

Reste à minorer. Soit $N \geqslant 0$. Pour $n \geqslant N$,
$$u_n \geqslant \sum_{k=0}^{N}\left(1 - \frac{k}{n}\right)^n = v_n.$$

Or
$$v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell_N = \sum_{k=0}^{N} \mathrm{e}^{-k} = \frac{\mathrm{e} - \mathrm{e}^{-N-1}}{\mathrm{e}-1} \xrightarrow[N\to+\infty]{} \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}.$$

Soit $\varepsilon > 0$. On a N tel que $\ell_N \geqslant \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1} - \varepsilon$.

Puis, avec $v_n \to \ell_N$, à partir d'un certain rang $N' > N$, $v_n \geqslant \ell_N - \varepsilon \geqslant \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1} - 2\varepsilon$, et alors, si $n \geqslant N'$,

$$\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1} - 2\varepsilon \leqslant u_n \leqslant \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}$$

ce qui permet de conclure.

Séries

8 **Pour chauffer** Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un terme général décroissant de série convergente, montrer que $u_n = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$.

Solution de 8 : Pour chauffer

On reprend l'idée de la preuve classique de divergence de la série harmonique consistant à minorer $H_{2n} - H_n$... Mais dans un cas de convergence !

Si $n \in \mathbb{N}$, $S_{2n} - S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} u_k \geqslant n u_{2n} \geqslant 0$ donne $2n u_{2n} \to 0$.

Puis, toujours pour $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant (2n+1)u_{2n+1} \leqslant 2n u_{2n} + u_{2n+1} \to 0$ donc $(2n+1)u_{2n+1} \to 0$.

Finalement, $n u_n \to 0$ ce qui conclut.

9 **Oral Mines – pas difficile** Soit $\alpha \in]1, +\infty[$. Déterminer la nature des séries de terme général donné par les formules

$$u_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}, \qquad v_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^\alpha}, \qquad w_n = \frac{\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}}{\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)^\alpha}$$

Solution de 9 : Oral Mines – pas difficile

La plus facile est sans doute la deuxième, pour laquelle, par théorème sur les séries alternées, dont les hypothèses sont assez évidemment réalisées ici,

$$|v_n| \leqslant \frac{1}{n^\alpha}$$

ce qui, par comparaison à une série de Riemann, donne la convergence absolue, donc la convergence, de $\sum v_n$.

Pour la première, on fait une comparaison série-intégrale : c'est une idée importante à avoir quand on veut un ordre de grandeur de ce genre de terme. On a

$$\int_n^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \leqslant u_n \leqslant \int_{n-1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$$

On calcule :

$$\frac{1}{\alpha-1} n^{1-\alpha} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{\alpha-1}(n-1)^{1-\alpha}$$

Mais cela implique

$$u_n \sim \frac{1}{\alpha-1} n^{1-\alpha}$$

et donc $\sum u_n$ converge si et seulement si $1-\alpha<-1$, i.e. $\alpha>2$ (comparaison à une série de Riemann). Pour la troisième, des comparaisons séries-intégrales donnent l'équivalent

$$w_n \sim \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$$

On est donc ramené à l'étude de convergence d'une série de Bertrand, dans un cas qui se règle (encore !) par comparaison série-intégrale, on trouve qu'il y a convergence si et seulement si $\alpha>1$.

10 **Oral Centrale** Étudier la suite (u_n) définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et, pour tout n, $u_{n+1} = \dfrac{u_n+1}{u_n^2+1}$.

Étudier la nature de la série de terme général $v_n = u_n - 1$.

Solution de 10 : Oral Centrale

On voit rapidement que $u_{n+1} \geqslant -1$, donc la suite est positive à partir du rang 2 au moins. Puis on situe u_n par rapport à 1. On calcule $u_{n+1}-1$, et on voit que u_n est alternativement plus grand et plus petit que 1. Puis on montre que $|u_{n+1}-1| \leqslant \frac{1}{2}|u_n-1|$. D'où la convergence de (u_n) vers 1 et la convergence de $\sum v_n$ par comparaison à une série géométrique.

11 **Oral Mines** Discuter, en fonction des réels strictement positifs a et α, la nature de la série de terme général

$$u_n = a^{x_n} \qquad \text{où} \qquad x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$$

Solution de 11 : Oral Mines

Si $a \geqslant 1$, divergence grossière. Supposons donc $a<1$.

Si (x_n) converge, divergence grossière aussi. Supposons donc $\alpha \leqslant 1$.

Si $\alpha=1$, le développement asymptotique

$$x_n = \ln n \; + \; \gamma \; + \; \mathrm{o}(1)$$

n'est pas au programme. On encadre :

$$\int_1^{n+1} \frac{dt}{t} \leqslant x_n \leqslant 1 + \int_1^{n} \frac{dt}{t}$$

ce qui suffit pour conclure, en remarquant que $a^{\ln n} = n^{\ln a}$...

Si $\alpha<1$, la comparaison à une série de Riemann (et une comparaison somme-intégrale pour évaluer l'ordre de grandeur de x_n) montre la convergence.

12 **Oral X ? Pas si difficile !** On définit $u_n = 1/n$ si n n'est pas un carré, $u_n = -1/n$ si n est un carré. Nature de la série $\sum u_n$?

Solution de 12 : Oral X ? Pas si difficile !

En passant par les sommes partielles, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - 2\sum_{p=1}^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor} \frac{1}{p^2} = H_n - 2S_{\lfloor\sqrt{n}\rfloor} \to +\infty$ par divergence de la série harmonique et convergence de la série de Riemann de terme général $\dfrac{1}{n^2}$.

13 **Oral X - ENS** Soit $d>0$ et (z_n) une suite de nombres complexes non nuls telle que, si $n \neq m$, $|z_n - z_m| \geqslant d$. Soit $\alpha > 2$. Montrer que la série de terme général $\dfrac{1}{|z_n|^\alpha}$ converge.

Solution de 13 : Oral X - ENS

L'idée est de montrer qu'il y a « peu » de z_n dont le module est « petit »...Soyons plus précis, et comptons les z_n qui sont dans une couronne : on définit

$$n(p) = \left|\{k \in \mathbb{N},\quad p \leqslant |z_k| \leqslant p+1\}\right|$$

Si $p \leqslant |z_k| \leqslant p+1$, $D(z_k, d/2)$ est un disque inclus dans la couronne

$$C_p = \{z \in \mathbb{C},\quad p - d/2 \leqslant |z| \leqslant p+1+d/2\}$$

Il y a $n(p)$ tels disques, et ils sont disjoints. La somme de leurs aires est donc inférieure ou égale à l'aire de la couronne C_p, ce qui se traduit par

$$n(p) \times \pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 \leqslant \pi\left(p+1+\frac{d}{2}\right)^2 - \pi\left(p-\frac{d}{2}\right)^2$$

d'où, en simplifiant un peu,

$$n(p) \leqslant \frac{4}{d^2}(d+1)(1+2p)$$

Il y a d'autre part un nombre fini de k tels que $|z_k| \leqslant 1$. On peut alors soif faire une sommation par paquets si on maîtrise la sommabilité, soit revenir aux sommes partielles : soit $N \geqslant 1$.

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{|z_n|^\alpha} = \sum_{\substack{n \in [\![0,N]\!] \\ |z_n| \leqslant 1}} \frac{1}{|z_n|^\alpha} + \sum_{p=1}^{+\infty} \left(\sum_{\substack{n \in [\![0,N]\!] \\ |z_n| \in [p, p+1[}} \frac{1}{|z_n|^\alpha} \right)$$

(la deuxième somme est, contrairement aux apparences, finie). Donc

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{|z_n|^\alpha} \leqslant \sum_{\substack{n \in [\![0,N]\!] \\ |z_n| \leqslant 1}} \frac{1}{|z_n|^\alpha} + \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{n(p)}{p^\alpha}$$

Mais $\dfrac{n(p)}{p^\alpha} \leqslant \dfrac{4}{d^2}\dfrac{2p+1}{p^\alpha}(d+1) \sim \dfrac{8(d+1)}{d^2 p^{\alpha-1}}$ donc $\displaystyle\sum_{p \geqslant 1} \frac{n(p)}{p^\alpha}$ converge, donc $\displaystyle\sum \frac{1}{|z_n|^\alpha}$ converge.

14 **Oral X** Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}$.

1. Montrer que la suite (u_n) converge. On note ℓ sa limite.
2. Préciser le signe de ℓ.
3. Montrer que $\ell = -(1+\sqrt{2}) \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$.
4. Montrer que $u_n = \ell + \dfrac{1}{2\sqrt{n}} + \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right)$.
5. Montrer que $\ell = -\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})^2}$.

6. Étudier les variations de u.
7. Déterminer un développement asymptotique semblable à celui de la question 4 pour la suite de terme général $v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$.
8. Soit $\alpha \in]0,1[$. Donner un développement asymptotique à trois termes pour $w_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$.

Solution de 14 : Oral X

C'est essentiellement la même méthode que l'exercice du TD sur le développement de la série harmonique.

1. Plusieurs méthodes possibles. On peut calculer un équivalent de $u_{n+1} - u_n$ pour montrer que la série $\sum (u_{n+1} - u_n)$ converge, et appliquer la correspondance suites-séries. On trouve

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1/2} - 2\sqrt{n}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1/2} - 1\right) \sim -\frac{1}{4n^{3/2}}.$$

2. Pour cette deuxième question, une comparaison somme-intégrale est intéressante :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \leqslant 1 + \int_1^n \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$$

En calculant :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \leqslant 2\sqrt{n} - 1$$

On a donc $\ell \leqslant -1$.

3. La convergence de la série au second membre relève du théorème sur les séries alternées. On s'inspire du calcul de la somme de la série harmonique alternée, en séparant les termes d'indices pairs et impairs. Ce qui ne peut se faire que dans une somme partielle, sinon on écrit des séries divergentes. Comme la série converge, on peut se contenter des sommes ayant un nombre pair de termes. Si $N \geqslant 1$:

$$\begin{aligned}
\sum_{p=1}^{2N} \frac{(-1)^{p+1}}{\sqrt{p}} &= \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{2k+1}} - \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{2k}} \\
&= \sum_{p=1}^{2N} \frac{1}{\sqrt{p}} - 2\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{2k}} \\
&= u_{2N} + 2\sqrt{2N} - \frac{2}{\sqrt{2}}(u_N + 2\sqrt{N}) \\
&\xrightarrow[N\to+\infty]{} (1-\sqrt{2})\ell
\end{aligned}$$

D'où le résultat, qui d'ailleurs confirme le signe de u_n. On pouvait aussi retrancher à $\sum_{p=1}^{2N} \frac{(-1)^{p+1}}{\sqrt{p}}$ la somme $\sum_{p=1}^{2N} \frac{1}{\sqrt{p}}$, une présentation un peu différente de la même idée.

4. On cherche un équivalent de $u_n - \ell = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n} - \ell$. L'idée est d'utiliser la sommation des équivalents avec le lien suite-série.

$$u_n - u_{n+1} \sim \frac{1}{4n^{3/2}}$$

On est dans le cas de convergence, avec $\frac{1}{4n^{3/2}} > 0$, donc on peut en déduire

$$\sum_{k=n}^{+\infty}(u_k - u_{k+1}) = u_n - \ell \sim \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{4k^{3/2}} = \frac{1}{4}\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k^{3/2}} \sim \frac{1}{4}\frac{1}{\frac{1}{2}n^{1/2}} = \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

le dernier équivalent étant obtenu classiquement par comparaison à une intégrale.

On obtient $u_n = \ell + \frac{1}{2\sqrt{n}} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ ce qui n'est pas tout à fait ce que l'on voulait.

Pour obtenir le terme en $\mathcal{O}$, une idée est d'utiliser le théorème de sommation appliqué à $v_n - v_{n+1} = \left(u_n - \ell - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \left(u_{n+1} - \ell - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{5/2}}\right)$.

On obtient alors

$$v_n - 0 = \mathcal{O}\left(\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k^{5/2}}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

toujours avec une comparaison série-intégrale pour terminer.

5. Avec l'expression conjuguée :

$$\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{p}(\sqrt{p}+\sqrt{p-1})^2} = \sum_{p=1}^{n}\frac{(\sqrt{p}-\sqrt{p-1})^2}{\sqrt{p}}$$
$$= 2\sum_{p=1}^{n}\sqrt{p} - \sum_{p=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{p}} - 2\sum_{p=1}^{n}\sqrt{p-1}$$

ce qui donne le résultat.

6. $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+1} + 2\sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} < 0$ donc u décroît strictement.
7. Voir l'exercice de TD. Même méthode.
8. On commence par une comparaison à une intégrale pour obtenir l'équivalent

$$w_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}.$$

On applique alors la méthode précédente à $u_n = w_n - \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$.

Comme

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}\left((n+1)^{1-\alpha} - n^{1-\alpha}\right) = \frac{1}{n^\alpha}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-\alpha} - \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1-\alpha} - 1\right) \sim -\frac{\alpha}{2n^{1+\alpha}}.$$

On obtient un terme général de série convergente, il existe donc une constante β telle que $w_n = \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha} + \beta + \mathrm{o}(1)$.

Pour avoir un terme de plus, on somme les équivalents, cas de convergence, $u_n - u_{n+1} \sim \frac{\alpha}{2n^{1+\alpha}}$:

$$u_n - \beta \sim \frac{\alpha}{2}\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{n^{1+\alpha}} \sim \frac{\alpha}{2\alpha n^\alpha} = \frac{1}{2n^\alpha}$$

en complétant avec une comparaison série-intégrale. Finalement,

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha} = \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha} + \beta + \frac{1}{2n^\alpha} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right).}$$