

Exercice

1. (a) **Faux.** Contre-exemple : $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.
- (b) **Vrai.** Si la série $\sum u_n$ converge absolument, $u_n \rightarrow 0$, donc à partir d'un certain rang, $|u_n| \leq 1$, donc $0 \leq u_n^2 \leq |u_n|$ donc la série $\sum u_n^2$ converge par comparaison.
- (c) **Vrai.** Si la série $\sum u_n$ converge, $u_n \rightarrow 0$ donc $\frac{1}{u_n} \neq 0$ donc la série $\sum 1/u_n$ diverge grossièrement.
- (d) **Faux.** $\sum_{n=3}^N \frac{1}{n(n-1)} = \sum_{n=3}^N \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{N} \rightarrow \frac{1}{2} \neq 1$.
- (e) **Vrai.** Voir exercice de cours.
2. (a) $\sum \frac{n!}{(2n)!}$ converge par critère de d'Alembert.
- (b) $\sum \frac{1}{2^n + 3^n}$ converge car $u_n \sim \frac{1}{3^n}$ terme général positif d'une série géométrique convergente.
- (c) $\sum \frac{2^n + n}{n2^n}$ diverge car $u_n \sim \frac{1}{n}$ terme général positif de série de Riemann divergente.
- (d) $\sum \frac{2^n + n}{n2^{2n}}$ converge car $u_n \sim \frac{1}{n2^n}$ terme général positif de série de Riemann convergente.
- (e) $\sum \frac{\cos(n(n+1))}{(\ln n)\sqrt{n^6 + 2n + 3}}$ converge car $u_n = o\left(\frac{n+1}{(\ln n)\sqrt{n^6 + 2n + 3}}\right)$ et $\frac{n+1}{(\ln n)\sqrt{n^6 + 2n + 3}} \sim \frac{1}{n^2 \ln n}$ terme général positif de série convergente car $\frac{1}{n^2 \ln n} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et $\frac{1}{n^2}$ terme général positif de série de Riemann convergente.
- (f) $\sum \sin(\pi\sqrt{n^2+1})$ converge car
- $$u_n = \sin\left(n\pi\left(1 + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\right) = (-1)^n \sin\left(\frac{\pi}{2n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \frac{(-1)^n \pi}{2n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Le premier terme est le terme général d'une série semi-convergente par Théorème Spécial sur les Séries Alternées, le second est le terme général d'une série absolument convergente par comparaison.

Problème CCINP : TPC - CCP - 2013

Cas où $\alpha > 1$

1. $\frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha} = o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ avec $\alpha > 1$ donc la série est convergente car absolument convergente par comparaison à une série de Riemann.

Cas où α appartient à $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$

2. Changement de variable $y = \sqrt{t}$.
3. Intégration par parties.
4. $x \mapsto \int_1^x \left| \frac{\cos(\pi y)}{y^{2\alpha}} \right| dy$ est croissante comme primitive de fonction positive, $\left| \frac{\cos(\pi y)}{y^{2\alpha}} \right| \leq \frac{1}{y^{2\alpha}}$ et

$$\int_1^x \frac{1}{y^{2\alpha}} dy = \frac{1}{2\alpha-1} \left(1 - \frac{1}{x^{2\alpha-1}}\right) \rightarrow \frac{1}{2\alpha-1}$$

en $+\infty$ (car $2\alpha - 1 > 0$) en croissant, on en déduit que $x \mapsto \int_1^x \left| \frac{\cos(\pi y)}{y^{2\alpha}} \right| dy$ est croissante et majorée, donc

$$x \mapsto \int_1^x \left| \frac{\cos(\pi y)}{y^{2\alpha}} \right| dy \text{ converge en } +\infty.$$

5. Comme $\frac{\cos(\pi\sqrt{x})}{\sqrt{x}^{2\alpha-1}} \rightarrow 0$ en $+\infty$, d'après les deux précédentes questions, $x \mapsto \int_1^x \phi(t) dt$ l'est aussi.

6. ϕ est de classe C^1 sur $[1, +\infty[$ par opérations et pour tout t ,

$$\phi'(t) = \frac{\pi\sqrt{t} \cos(\pi\sqrt{t}) - 2\alpha \sin(\pi\sqrt{t})}{2t^{\alpha+1}}$$

7. Si $t \in [1, +\infty[$, par inégalité triangulaire,

$$|\phi'(t)| \leq \frac{\pi\sqrt{t} + 2\alpha}{2t^{\alpha+1}} \leq \frac{(\pi + 2\alpha)\sqrt{t}}{2t^{\alpha+1}} \leq \frac{\pi + \alpha}{t^{\alpha+1/2}}$$

8. Si $(a, b) \in [1, +\infty[^2$ vérifiant $a < b$, on a

$$\begin{aligned} |\phi(a) - \phi(b)| &= \left| \int_a^b \phi'(t) dt \right| \leq \int_a^b |\phi'(t)| dt \leq \int_a^b \frac{K}{t^{\alpha+1/2}} dt \\ &\leq \int_a^b \frac{K}{a^{\alpha+1/2}} dt = \frac{K}{a^{\alpha+1/2}} |b-a|. \end{aligned}$$

(On peut aussi utiliser l'inégalité des accroissements finis.)

9. Par la relation de Chasles, $V_N = \int_1^{N+1} \phi(t) dt$.

10. D'après la question précédente et la question 5, $\sum_{n \geq 1} v_n$ converge.

11. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, comme $n < n+1$, en utilisant 8,

$$\begin{aligned} |u_n - v_n| &= \left| \int_n^{n+1} (\phi(n) - \phi(t)) dt \right| \leq \int_n^{n+1} |\phi(n) - \phi(t)| dt \leq \frac{K}{n^{\alpha+1/2}} \int_n^{n+1} (t-n) dt \\ &\leq \frac{K}{n^{\alpha+1/2}} \int_n^{n+1} dt \end{aligned}$$

$$\text{Donc } |u_n - v_n| \leq \frac{K}{n^{\alpha+1/2}}.$$

12. Par comparaison à une série de Riemann convergente, la série

$$\sum_{n \geq 1} (u_n - v_n) \text{ est absolument convergente donc convergente.}$$

13. Comme $\frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha} = u_n = (u_n - v_n) + v_n$ est la somme de deux termes généraux de séries convergentes,

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha} \text{ converge.}$$

Cas $\alpha = \frac{1}{2}$

14. On a $\delta_n = e^{i\pi\sqrt{n}}(e^{i\pi\sqrt{n}(\sqrt{1+1/n}-1)} - 1) = e^{i\pi\sqrt{n}}(e^{i\pi\sqrt{n}(\sqrt{1+1/n}-1)} - 1)$, ce qui avec un peu de calcul et de dextérité permet d'obtenir

$$\delta_n = \frac{i\pi e^{i\pi\sqrt{n}}}{2\sqrt{n}} - \frac{\pi^2 e^{i\pi\sqrt{n}}}{8n} - \frac{i\pi(\pi^2 + 6)e^{i\pi\sqrt{n}}}{48n^{3/2}} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right).$$

15. En passant à la partie réelle, en notant que

$$\Re\left(o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)\right) = \Re\left(\frac{\varepsilon_n}{n^{3/2}}\right) = \frac{\Re(\varepsilon_n)}{n^{3/2}} = o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

(avec $\varepsilon_n \rightarrow 0$ donc $\Re(\varepsilon_n) \rightarrow 0$). On obtient

$$\cos(\pi\sqrt{n+1}) - \cos(\pi\sqrt{n}) = -\frac{\pi}{2\sqrt{n}} \sin(\pi\sqrt{n}) - \frac{\pi^2}{8n} \cos(\pi\sqrt{n}) + \frac{\pi(\pi^2 + 6)}{48n^{3/2}} \sin(\pi\sqrt{n}) + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

donc

$$\frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{\sqrt{n}} = -\frac{2}{\pi} (\cos(\pi\sqrt{n+1}) - \cos(\pi\sqrt{n})) - \frac{\pi}{4n} \cos(\pi\sqrt{n}) + \frac{(\pi^2 + 6)}{24n^{3/2}} \sin(\pi\sqrt{n}) + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right).$$

16. Comme $\frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^{3/2}} = o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$, par comparaison à une série de Riemann convergente, la série

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^{3/2}} \text{ est absolument convergente donc convergente.}$$

Si $w_n = o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$, on a de même que $\sum_{n \geq 1} w_n$ converge.

17. Soit $a_n = \cos(\pi\sqrt{n})$. Alors $a_{4n^2} = 1$ et $a_{(2n+1)^2} = -1$ donc la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*} = (\cos(\pi\sqrt{n}))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est divergente.

18. D'après les questions précédentes, $\frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{\sqrt{n}}$ est la somme de termes généraux de séries convergentes et d'UN terme général de série (télescopique) divergente, donc

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{\sqrt{n}} \text{ diverge.}$$

Cas $\alpha < \frac{1}{2}$

19. Soit N supérieur ou égal à 2.

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{\sqrt{n}} &= \sum_{n=1}^N \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha} n^{\alpha-1/2} = \sum_{n=1}^N (S_n - S_{n-1}) n^{\alpha-1/2} \\ &= \sum_{n=1}^N S_n n^{\alpha-1/2} - \sum_{n=0}^{N-1} S_n (n+1)^{\alpha-1/2} \\ &= \sum_{n=1}^N S_n (n^{\alpha-1/2} - (n+1)^{\alpha-1/2}) + S_N (N+1)^{\alpha-1/2} \end{aligned}$$

On dit qu'on a effectué une **transformation d'Abel**, équivalent discret de l'intégration par partie. ($\int \leftrightarrow \sum$ et $f' \leftrightarrow u_{n+1} - u_n$.)

20. $\alpha < 1/2$ et comme (S_n) converge, elle est bornée. Donc $S_n (n^{\alpha-1/2} - (n+1)^{\alpha-1/2}) = o(n^{\alpha-1/2} - (n+1)^{\alpha-1/2})$ qui est le terme général d'une série (télescopique) positive convergente, donc la série $\sum_{n \geq 1} S_n (n^{\alpha-1/2} - (n+1)^{\alpha-1/2})$ est convergente.

21. Comme $S_N (N+1)^{\alpha-1/2} \rightarrow 0$ et vu les deux questions précédentes, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{\sqrt{n}}$ est convergente.

22. C'est contradictoire avec la partie précédente. Donc $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha}$ diverge.

Fin