Devoir en Temps Limité n° 2

À lire attentivement

- Les copies mal présentées, illisibles ou dans lesquelles les réponses aux questions ne seraient pas encadrées, et dans lesquelles il n'y aurait pas de trait tiré entre chaque question (ou sous-question) sur la largeur de la feuille seront **fortement sanctionnées, voire non corrigées**.
- Présentation et rédaction (concise, mais complète) sont une part importante de la notation.
- Il est IMPÉRATIF de respecter l'ordre des questions (quitte à laisser des blancs pour « plus tard ».)
- Il est conseillé d'utiliser un brouillon. Seules les questions abouties figurent sur la copie.
- **Aucun départ avant la fin des 4 heures n'est autorisé.**
- **Tout le monde** doit traiter le premier exercice.
  Ensuite il faut **choisir** de traiter le sujet $(*)$ **Mines-Ponts ou** (exclusif) le sujet **CCINP**.
  Inutile de traiter des questions dans les deux sujets, vous n'aurez pas les points.
  Vous choisissez, puis **vous ne changez plus d'avis.**
- LA CALCULATRICE N'EST PAS AUTORISÉE.
- Donnez tout, croyez-y, vous êtes aux concours et vous voulez décrocher l'école de vos rêves !

💪

- Extraits d'un rapport de jury CCINP : « *Voici quelques conseils pour les futurs candidats :*
  1. *Éviter d'essayer d'escroquer les correcteurs en trafiquant les calculs ; ceci indispose fortement le correcteur.*
  2. *Chaque hypothèse d'une question doit être utilisée et le candidat doit écrire sur sa copie à quel moment cette hypothèse est utile.*
  3. *Certaines réponses peuvent tenir en une ou deux lignes.*
  4. *Citer TOUS les théorèmes utilisés et rappeler sur le moment toutes les hypothèses utiles mêmes si elles figures quelques lignes plus haut ou à la question précédente.*
  5. *Numéroter les copies et les rendre dans l'ordre.*
  6. *Commencer l'épreuve par une lecture diagonale du sujet ; vous pourrez ainsi mieux vous imprégner du texte.*
  7. *C'est perdre son temps que de recopier l'énoncé avant chaque réponse.*
  8. *Prendre le temps de bien comprendre la question avant de répondre.*
  9. *Soigner la présentation.*
  10. *Éviter, dans une démonstration, d'utiliser le résultats qui doit être prouvé.* »

Exercice commun – 1 heure

Il faut tout justifier. Les questions sont indépendantes.

1. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies ?
   (a) Si la série $\sum u_n$ converge, la série $\sum u_n^2$ converge.
   (b) Si la série $\sum u_n$ converge absolument, la série $\sum u_n^2$ converge.
   (c) Si la série $\sum u_n$ converge, la série $\sum \frac{1}{u_n}$ diverge.
   (d) $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)} = 1.$
   (e) La famille $\left(\frac{1}{m^2+n^2}\right)_{(m,n)\in\mathbf{N}^2}$ n'est pas sommable.
2. Parmi les séries suivantes, lesquelles sont convergentes ?
   (a) $\sum \frac{n!}{(2n)!}$.
   (b) $\sum \frac{1}{2^n+3^n}$.
   (c) $\sum \frac{\cos(n)(n+1)}{\sqrt{n^6+2n+3\ln n}}$.
   (d) $\sum \frac{2^n+n}{n2^n}$.
   (e) $\sum \frac{2^n+n}{n^2 2^n}$.
   (f) $\sum \sin(\pi\sqrt{n^2+1})$.

Sujet CCINP : Étude de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha}$ – 3 heures

Le but de ce problème est de déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha}$ suivant la valeur du réel α.

A. Cas où $\alpha > 1$

1. On suppose dans cette question que $\alpha > 1$. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha}$ est convergente.

B. Cas où α appartient à $\left]\frac{1}{2}, 1\right]$

On suppose, dans cette partie, que α appartient à $\left]\frac{1}{2}, 1\right]$.

On définit la fonction ϕ sur $[1, +\infty[$ en posant $\phi(t) = \frac{\sin(\pi\sqrt{t})}{t^\alpha}$.

On pose $u_n = \phi(n) = \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha}$ et $v_n = \displaystyle\int_n^{n+1} \phi(t)\,dt$ pour $n \in \mathbf{N}^*$.

Nature de l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^{+\infty} \phi(t)\,dt$

2. Montrer que pour tout $x > 1$

$$\int_1^x \phi(t)\,dt = 2\int_1^{\sqrt{x}} \frac{\sin(\pi y)}{y^{2\alpha-1}}\,dy$$

3. En déduire que

$$\int_1^x \phi(t)dt = 2\left(-\frac{\cos(\pi\sqrt{x})}{\pi\sqrt{x}^{2\alpha-1}} - \frac{1}{\pi}\right) - \frac{2(2\alpha-1)}{\pi}\int_1^{\sqrt{x}} \frac{\cos(\pi y)}{y^{2\alpha}}dy$$

4. Montrer que la fonction $x \mapsto \int_1^x \left|\frac{\cos(\pi y)}{y^{2\alpha}}\right| dy$ est convergente en $+\infty$.

On admet qu'alors $x \mapsto \int_1^x \frac{\cos(\pi y)}{y^{2\alpha}}dy$ l'est aussi (et cela se démontre comme pour la convergence absolue des séries.)

5. En déduire que la fonction $x \mapsto \int_1^x \phi(t)dt$ l'est aussi.

Étude de la dérivée de la fonction ϕ.

6. Montrer que la fonction ϕ est de classe C^1 sur $[1,+\infty[$ et calculer sa dérivée $\phi'(t)$ pour tout $t \in [1,+\infty[$.
7. Montrer qu'il existe un réel $K > 0$ tel que $\forall t \in [1,+\infty[, \left|\phi'(t)\right| \leqslant \frac{K}{t^{\alpha+\frac{1}{2}}}$
8. Montrer que pour tout $(a,b) \in [1,+\infty[^2$ vérifiant $a < b$, on a $\left|\phi(a)-\phi(b)\right| \leqslant \frac{K}{a^{\alpha+\frac{1}{2}}}|a-b|$.

Nature de la série $\sum v_n$.

9. Exprimer la somme partielle $V_N = \sum_{n=1}^{N} v_n$ pour tout $N \in \mathbf{N}^*$ à l'aide d'une intégrale.
10. Quelle est la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} v_n$?

Nature de la série $\sum(u_n - v_n)$.

11. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $|u_n - v_n| \leqslant \frac{K}{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}$
12. En déduire que $\sum_{n\geqslant 1}(u_n - v_n)$ converge.

Conclusion

13. Conclure sur la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha}$.

C. Cas $\alpha = \frac{1}{2}$

On suppose, dans cette partie, que α vaut $\frac{1}{2}$.

En vue du développement asymptotique de $\frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{\sqrt{n}}$, on pose $\delta_n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\sqrt{n+1}} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\sqrt{n}}$.

14. Montrer que $\delta_n = \frac{\mathrm{i}\pi \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\sqrt{n}}}{2\sqrt{n}} - \frac{\pi^2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\sqrt{n}}}{8n} - \frac{\mathrm{i}\pi\left(\pi^2+6\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\sqrt{n}}}{48n^{3/2}} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$.
15. En déduire que

$$\frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{\sqrt{n}} = -\frac{2}{\pi}\left(\cos(\pi\sqrt{n+1}) - \cos(\pi\sqrt{n})\right) - \frac{\pi}{4n}\cos(\pi\sqrt{n}) + \frac{\left(\pi^2+6\right)}{24n^{3/2}}\sin(\pi\sqrt{n}) + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

16. Quelle est la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^{3/2}}$? Celle de $\sum_{n\geqslant 1} w_n$ avec $w_n = o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$?

On admet que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\cos(\pi\sqrt{n})}{n}$ est convergente.

17. En utilisant des suites extraites, démontrer que la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbf{N}^*} = \left(\cos(\pi\sqrt{n})\right)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est divergente .
18. Que peut-on en déduire sur la nature de $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{\sqrt{n}}$?

D. Cas $\alpha < \frac{1}{2}$

On suppose, dans cette partie, que le réel α est strictement inférieur à $\frac{1}{2}$.

On va montrer, par l'absurde, que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha}$ diverge. On suppose donc que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha}$ converge.

On pose pour tout $p \in \mathbf{N}^*$, $S_p = \sum_{n=1}^{p} \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha}$, et $S_0 = 0$.

19. Montrer que pour tout entier N supérieur ou égal à 2, on a

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{N} S_n\left(n^{\alpha-1/2} - (n+1)^{\alpha-1/2}\right) + S_N(N+1)^{\alpha-1/2}$$

20. Justifier que la série $\sum_{n\geqslant 1} S_n\left(n^{\alpha-1/2} - (n+1)^{\alpha-1/2}\right)$ est convergente.

    Indication : on pourra justifier que que (S_n) est bornée.
21. Que peut-on en déduire sur la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{\sqrt{n}}$?
22. Conclure sur la nature de $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha}$.

— Fin du sujet —

Sujet $*$:
Mines-Ponts 2015 – Maths 1 – PSI & PC – 3 heures

Méthode de Stein

- ★ On note $\mathscr{F}$ l'ensemble des fonctions bornées de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{R}$.
- ★ On note $\mathscr{P}$ l'ensemble des suites de nombres réels positifs de somme égale à 1 :

$$\mathscr{P} = \{P = (p_n,\ n \geqslant 0) \text{ tel que } \forall n \geqslant 0,\ p_n \geqslant 0 \text{ et } \sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1\}$$

- ★ Pour $P, Q \in \mathscr{P}$, on définit

$$\operatorname{dist}(P,Q) = \sup_{A\subset\mathbf{N}} \left|\sum_{n\in A} p_n - \sum_{n\in A} q_n\right| = \sup_{A\subset\mathbf{N}} \left|\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{1}_A(n) p_n - \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{1}_A(n) q_n\right|$$

  où $\mathbf{1}_A(n) = 1$ si $n \in A$ et $\mathbf{1}_A(n) = 0$ sinon. On pourra écrire $P(A)$ pour $\sum_{n\in A} p_n$.
- ★ Dans tout ce qui suit, λ est un réel strictement positif fixé et h est un élément de $\mathscr{F}$, c'est-à-dire une fonction bornée de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{R}$.

1. Préliminaires

1. Trouver le réel c tel que la suite
$$c\frac{\lambda^n}{n!},\ n \geqslant 0$$
appartienne à $\mathscr{P}$.
2. Soient p, q deux réels de $[0,1]$. Calculer
$$\operatorname{dist}\big((1-p, p, 0, \ldots), (1-q, q, 0, \ldots)\big)$$
3. Soient $f \in \mathscr{F}$ et $P \in \mathscr{P}$, montrer que la série de terme général $(f(n)p_n,\ n \geqslant 0)$ est convergente.

2. Caractérisation

Soit $P_\lambda = \big(p_n^{(\lambda)},\ n \in \mathbf{N}\big) \in \mathscr{P}$ défini par

$$\forall n \in \mathbf{N},\ p_n^{(\lambda)} = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}$$

4. Soit $f \in \mathscr{F}$, montrer que la série de terme général $(nf(n)p_n^{(\lambda)},\ n \geqslant 0)$ est convergente.
5. Pour tout $f \in \mathscr{F}$, établir l'identité suivante :

$$\lambda \sum_{n=0}^{+\infty} f(n+1) p_n^{(\lambda)} = \sum_{n=0}^{+\infty} n f(n) p_n^{(\lambda)} \tag{1}$$

Soit $Q = (q_n,\ n \geqslant 0)$ un élément de $\mathscr{P}$ tel que pour tout $f \in \mathscr{F}$, l'identité suivante soit satisfaite :

$$\lambda \sum_{n=0}^{+\infty} f(n+1) q_n = \sum_{n=0}^{+\infty} n f(n) q_n$$

6. En choisissant convenablement des éléments de $\mathscr{F}$, montrer que $Q = \mathscr{P}_\lambda$.

3. Résolution de l'équation de Stein

On note $\mathscr{S}_h$ l'ensemble des fonctions de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{R}$ telles que, pour tout entier $n \geqslant 0$, l'identité suivate soit satisfaite :

$$\lambda f(n+1) - n f(n) = h(n) - \sum_{k=0}^{\infty} h(k) p_k^{(\lambda)} \tag{2}$$

Pour simplifier les notations, on note $\tilde{h}$ la fonction définie pour tout $n \geqslant 0$ par

$$\tilde{h}(n) = h(n) - \sum_{k=0}^{\infty} h(k) p_k^{(\lambda)}$$

7. Montrer que $\mathscr{S}_h$ possède une infinité d'éléments et que pour tout $f \in \mathscr{S}_h$, pour tout entier $n \geqslant 1$,
$$f(n) = \frac{(n-1)!}{\lambda^n} \sum_{k=0}^{n-1} \tilde{h}(k) \frac{\lambda^k}{k!} \tag{3}$$
8. Pour $f \in \mathscr{S}_h$, pour tout entier $n \geqslant 1$, établir l'identité suivante
$$f(n) = -\frac{(n-1)!}{\lambda^n} \sum_{k=n}^{\infty} \tilde{h}(k) \frac{\lambda^k}{k!} \tag{4}$$
9. En déduire que toute fonction de $\mathscr{S}_h$ est bornée.

4. Propriété de Lipschitz

Pour une fonction f de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{R}$, on considère la fonction Δf définie de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{R}$ par

$$\forall n \in \mathbf{N},\ \Delta f(n) = f(n+1) - f(n)$$

On veut montrer que pour $f \in \mathscr{S}_h$,

$$\sup_{n\geqslant 1} |\Delta f(n)| \leqslant \frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda} \left(\sup_{k\in\mathbf{N}} h(k) - \inf_{k\in\mathbf{N}} h(k)\right) \tag{5}$$

Pour un entier $m \geqslant 0$, on considère d'abord le cas particulier où $h = \mathbf{1}_{\{m\}}$:

$$h(m) = 1 \text{ et } h(n) = 0 \text{ si } n \neq m$$

On note f_m l'un des éléments de $\mathscr{S}_{\mathbf{1}_{\{m\}}}$.

10. Etablir pour $1 \leqslant n \leqslant m$ l'identité suivante :
$$f_m(n) = -\frac{(n-1)!}{\lambda^n} p_m^{(\lambda)} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^k}{k!}$$

11. Etablir une identité analogue pour $n > m \geqslant 0$ et en déduire le signe de $f_m(n)$ pour tout $n \geqslant 1$.
12. Montrer que la fonction Δf_m est négative sur $\mathbf{N}\setminus\{0, m\}$.
Indication : on distinguera les cas $1 \leqslant n < m$ et $n > m \geqslant 0$.
13. Etablir les identités suivantes :
$$\Delta f_0(0) = \frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda} - f_0(0),\ \Delta f_m(m) = \frac{e^{-\lambda}}{\lambda}\left(\sum_{k\geqslant m+1}\frac{\lambda^k}{k!} + \frac{\lambda}{m}\sum_{k=1}^{m}\frac{k}{m}\frac{\lambda^k}{k!}\right) \text{ pour } m > 0$$
14. En déduire que
$$\sup_{n\geqslant 1}\Delta f_m(n) \leqslant \frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda}$$

On étudie maintenant le cas général. On définit la fonction h_+ par
$$h_+(n) = h(n) - \inf_{n\in\mathbf{N}} h(k)$$

15. Montrer que $\mathscr{S}_h = \mathscr{S}_{h_+}$.
16. Montrer que la série
$$\sum_{m\in\mathbf{N}} h_+(m) f_m(n)$$
est convergente pour tout entier $n \geqslant 1$.
17. Montrer que la fonction g définie pour tout $n \geqslant 1$ par
$$g(n) = \sum_{m=0}^{\infty} h_+(m) f_m(n)$$
appartient à $\mathscr{S}_h$.
18. En déduire que pour tout entier $n \geqslant 1$,
$$f(n+1) - f(n) \leqslant \frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda}\left(\sup_{k\in\mathbf{N}} h(k) - \inf_{k\in\mathbf{N}} h(k)\right)$$
19. En utilisant $-f$ et $h_- = \sup_{k\in\mathbf{N}} h(k) - h$ de façon analogue, en déduire que l'inégalité (5) est vraie dans le cas général.

5. Application probabiliste

On considère $(X_k,\ k = 1,\dots,n)$ une suite de variables aléatoires finies indépendantes. On suppose que pour tout entier $k \in \{1,\dots,n\}$, X_k suit une loi de Bernoulli de paramètre $r_k \in]0,1]$:
$$\mathbf{P}(X_k = 1) = r_k = 1 - \mathbf{P}(X_k = 0)$$
On pose $\lambda = \sum_{k=1}^{n} r_k$ ainsi que
$$S = \sum_{k=1}^{n} X_k \text{ et pour tout } k \in \{1,\dots,n\},\ W_k = S - X_k$$
On identifie la loi de la variable aléatoire S et l'élément $(\mathbf{P}(S=k),\ k\in\mathbf{N})$ de $\mathscr{P}$, l'ensemble défini au début de ce texte.

Quelques rappels concernant les probabilités finies :

- ★ Le *lemme des coalition* dit que si $X_1,\dots,X_k,\dots,X_n$ sont indépendantes, alors pour toutes fonctions f et g convenablement définies, $f(X_1,\dots,X_k)$ et $g(X_{k+1},\dots,X_n)$ sont indépendantes.
- ★ L'espérance est une application linéaire, l'espérance d'un produit de deux variables aléatoires indépendantes est le produit de leurs espérances.

20. Pour tout $k \in \{1,\dots,n\}$, pour tout $f \in \mathscr{F}$, montrer que
$$X_k f(S) = X_k f(W_k+1) \text{ et que } \mathbf{E}(f(W_k)X_k) = r_k \mathbf{E}(f(W_k))$$
21. Soit $h \in \mathscr{F}$ et $f \in \mathscr{S}_h$, établir l'identité suivante
$$\mathbf{E}(\lambda f(S+1) - Sf(S)) = \sum_{k=1}^{n} r_k \mathbf{E}\big(X_k(f(W_k+2) - f(W_k+1))\big)$$
22. Etablir que
$$\mathrm{dist}(\mathrm{loi}(S), P_\lambda) = \sup_{A\subset\mathbf{N}}\left|\mathbf{E}(\lambda f_A(S+1) - S f_A(S))\right|$$
où f_A est un élément de $\mathscr{S}_{\mathbf{1}_A}$.
23. En déduire que
$$\mathrm{dist}(\mathrm{loi}(S), P_\lambda) \leqslant \frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda}\sum_{k=1}^{n} r_k^2$$

— FIN DU SUJET —