ESTP 1975, Navale 1992

A. Convergence au sens de Cesáro

1. Question de cours. Voir le cours, donc.

2. Comme $v_n \to \ell$, $v_n - \ell = \mathrm{o}(1)$ puis $u_n v_n - \ell u_n = \mathrm{o}(u_n)$ et u_n est un terme général strictement positif de série divergente, donc avec la question précédente, $\sum_{p=0}^{n}(u_p v_p - \ell u_p) = \sum_{p=0}^{n} u_p v_p - \ell \sum_{p=0}^{n} u_p = \mathrm{o}\left(\sum_{p=0}^{n} u_p\right)$ donc $w_n - \ell = \mathrm{o}(1)$ et $\boxed{w_n \to \ell.}$

3. En prenant $v = ((-1)^n)_n$ et $u = (1)_n$, on obtient $w_n \to 0$ (car $w_{2n} = \dfrac{1}{2n+1}$ et $w_{2n+1} = 0$) et pourtant v n'a pas de limite. $\boxed{\text{La réciproque est fausse.}}$

4. Comme tout est strictement positif, on passe par le logarithme
$$\ln\left(\sqrt[n]{\prod_{p=1}^{n}\left(1+\frac{1}{p}\right)}\right) = \frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{p}\right)$$
Et on conclut que $\ln\left(\sqrt[n]{\prod_{p=1}^{n}\left(1+\frac{1}{p}\right)}\right) \to 0$ en utilisant la question 2 avec $(u_n) = (1)$ et $v_n = \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \to 0$.
On peut aussi, directement, reconnaître une somme télescopique et utiliser des croissances comparées
$$\frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{p}\right) = \frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n}\big(\ln(p+1) - \ln p\big) = \frac{\ln(n+1) - 0}{n} \to 0$$
Finalement, par continuité de l'exponentielle,
$$\boxed{\sqrt[n]{\prod_{p=1}^{n}\left(1+\frac{1}{p}\right)} \to 1.}$$

5. On a $u_n - v_n = \mathrm{o}(v_n)$ avec v_n terme général strictement positif de série divergente donc d'après la première question, $S_n - S'_n = \mathrm{o}(S'_n)$ c'est-à-dire $\boxed{S_n \sim S'_n.}$

6. On remarque que $\dfrac{1}{n} \sim \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ termes généraux strictement positifs de séries divergentes, donc d'après la question précédente puis par télescopage,
$$H_n \sim \sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \ln(n+1) = \ln n + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln n + \mathrm{o}(\ln n)$$
donc $\boxed{H_n \sim \ln n.}$

7. On montre que la série télescopique de terme général $u_n = (H_{n+1} - \ln(n+1)) - (H_n - \ln n)$ converge.
En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{1}{n+1} - \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n} + \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right) = \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n} + \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Or $\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n}$ est un terme général de série télescopique convergente, et $\mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ est un terme général de série **absolument** convergente par comparaison de séries à terme généraux positif, donc terme général de série convergente.

Finalement, $\sum u_n$ converge, donc par télescopage, $\boxed{\text{on a } \gamma\in\mathbb{R} \text{ tel que } u_n-\ln n\to\gamma.}$

8. (a) Il s'agit d'une version plus général de la règle de Raabe-Duhamel que celle vue en TD.

Soit pour $n\in\mathbb{N}^*$, $w_n=\ln\dfrac{u_{n+1}}{u_n}+\dfrac{\lambda}{n}=\ln\left(1-\dfrac{\lambda}{n}+v_n\right)+\dfrac{\lambda}{n}=v_n+\mathcal{O}\left(\left(-\dfrac{\lambda}{n}+v_n\right)^2\right)=v_n+\mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)+\mathcal{O}\left(\dfrac{|v_n|}{n}\right)+\mathcal{O}\left(v_n^2\right)$

car $-\dfrac{\lambda}{n}+v_n\to 0$ car $\sum v_n$ est convergente.

Comme si $a,b\in\mathbb{R}$, $ab\leqslant\dfrac{a^2+b^2}{2}$ car $(a+b)^2\geqslant 0$, $\dfrac{|v_n|}{n}\leqslant\dfrac{1}{2}\left(v_n^2+\dfrac{1}{n^2}\right)$ donc $\mathcal{O}\left(\dfrac{|v_n|}{n}\right)=\mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)+\mathcal{O}\left(v_n^2\right)$.

Donc $|w_n|=\left|v_n+\mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)+\mathcal{O}\left(v_n^2\right)\right|\leqslant|v_n|+a_n+b_n$ avec $0\leqslant a_n=\mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ et $0\leqslant b_n=\mathcal{O}\left(v_n^2\right)$.

Par comparaison de séries à termes généraux positifs, $\sum a_n$ converge. Puis comme $\sum|v_n|$ converge, $|v_n|\to 0$ donc $v_n^2=\mathrm{o}(|v_n|)$ et par comparaison de séries à termes généraux positifs, $\sum v_n^2$ converge puis $\sum b_n$ converge.

Finalement, $\sum|v_n|+a_n+b_n$ converge et par comparaison de séries à termes positifs, $\boxed{\sum|w_n| \text{ converge.}}$

Remarque : en cas de doute quant à la manipulation de $\mathcal{O}$, on peut toujours remplacer $\mathcal{O}(x_n)$ par x_nB_n où (B_n) est une suite bornée.

(b) On s'intéresse à la série télescopique de terme général

$$\ln\left((n+1)^\lambda u_{n+1}\right)-\ln\left(n^\lambda u_n\right)=\lambda\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ln\frac{u_{n+1}}{u_n}=\left(\ln\frac{u_{n+1}}{u_n}+\frac{\lambda}{n}\right)+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

qui est un terme général de série convergente comme somme de deux termes généraux de séries absolument convergentes donc convergentes, en utilisant la question précédente.

On a donc $\ell\in\mathbb{R}$ tel que $\ln\left(n^\lambda u_n\right)\to\ell$, puis en posant $A=\mathrm{e}^\ell>0$, $n^\lambda u_n\to A$ puis $\boxed{u_n\sim\dfrac{A}{n^\lambda}.}$

(c) On pourrait simplifier l'écriture de u_n et utiliser la formule de Stirling, mais ce n'est pas la logique de l'énoncé.

On remarque que pour $n\in\mathbb{N}$, $u_n>0$ et

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{2n+1}{2n+4}=1-\frac{3}{2n+4}=1-\frac{3}{2n}\cdot\frac{1}{1+\frac{2}{n}}=1-\frac{3}{2n}\left(1+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right)=1-\frac{3}{2n}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Comme $\mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ est un terme général de série absolument convergente, on se retrouve dans la situation de la question (a) et d'après la question précédente, on a $A>0$ tel que $u_n\sim\dfrac{A}{n^{3/2}}$.

Par comparaison des séries à termes positifs et par critère de Riemann $(3/2>1)$,

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge.}}$$

9. (a) Par application de la question 2 avec $u=(1)_n$, on a bien que

$\boxed{\text{Si la série de terme général } u_n \text{ est convergente, alors elle converge au sens de Cesàro.}}$

(b) On calcule, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\sigma_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} S_k = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\sum_{\ell=0}^{k} u_\ell = \frac{1}{n+1}\sum_{0\leqslant \ell\leqslant k\leqslant n} u_\ell = \frac{1}{n+1}\sum_{\ell=0}^{n}(n-\ell+1)u_\ell = S_n - \frac{\sum_{\ell=0}^{n}\ell u_\ell}{n+1}$$

Donc $S_n = \sigma_n + \dfrac{\sum_{\ell=0}^{n}\ell u_\ell}{n+1}$ avec $(\sigma_n)_n$ convergence par convergence au sens de Cesàro de $\sum u_n$ et par application de la question 2 comme $n u_n \to 0$. Ainsi $\boxed{\sum u_n \text{ converge.}}$

B. Autour d'une suite récurrente

1. (a) On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geqslant u_n$ donc (u_n) est croissante. Une étude rapide de $f : x \mapsto x + x^2$ (parabole de sommet $(-1/2, -1/4)$ passant par $(-1,0)$ et $(0,0)$) permet de voir que $]-1,0[$ est stable par f donc, par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < 0$ donc (u_n) est majorée par 0 et donc $\boxed{\text{elle converge.}}$

   Par continuité, la limite vérifie $\ell = \ell + \ell^2$ donc $\boxed{u_n \to 0.}$

(b) On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{v_{n+1} = v_n - v_n^2.}$

(c) Comme $v_n = -u_n \to 0$, $v_n^2 = o(v_n)$ donc avec la question précédente, $\boxed{v_n \sim v_{n+1}.}$

(d) On calcule $a_n = \dfrac{v_{n-1} - v_n}{v_{n-1}v_n} = \dfrac{v_{n-1}^2}{v_{n-1}v_n} = \dfrac{v_{n-1}}{v_n} \sim 1$ d'après la question précédente.

Donc $\dfrac{1}{v_n} - \dfrac{1}{v_{n-1}} \sim 1 > 0$. Par sommation des relations de comparaison dans le cas de divergence (voir problème 2... ou le cours !), $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{v_k} - \frac{1}{v_{k-1}}\right) = \frac{1}{v_n} - \frac{1}{v_0} \sim \sum_{k=1}^{n} 1 = n.$

Or $v_n \to 0$ donc $\dfrac{1}{v_0} = o\left(\dfrac{1}{v_n}\right)$ donc $\dfrac{1}{v_n} \sim n$ et $\boxed{v_n \sim \dfrac{1}{n}.}$

(e) Par critère de Riemann et comparaison de séries à termes positifs,

$$\boxed{\sum v_n \text{ diverge.}}$$

Puis comme $v_n \to 0$, $\sin v_n^2 \sim v_n^2 \sim \dfrac{1}{n^2}$, donc par critère de Riemann $(2 > 1)$ et comparaison de séries à termes positifs, $\boxed{\sum \sin v_n^2 \text{ converge.}}$

Et $\dfrac{v_n}{\sqrt{n}} \sim \dfrac{1}{n^{3/2}}$ donc par critère de Riemann $(3/2 > 1)$ et comparaison de séries à termes positifs,

$$\boxed{\sum \frac{v_n}{\sqrt{n}} \text{ converge.}}$$

(f) $\boxed{b_n = a_n - 1 \to 0}$ d'après la question 4 puis $b_n = \dfrac{v_{n-1} - v_n}{v_n} = \dfrac{v_{n-1}^2}{v_n} \sim v_n$ donc $\boxed{b_n \sim \dfrac{1}{n}}$ d'après les questions 3 et 4.

(g) Par sommation des relations de comparaison dans le cas de divergence, comme $a_n - 1 \sim \dfrac{1}{n}$ (question précédente, on obtient $\dfrac{1}{v_n} - \dfrac{1}{v_0} - n \sim H_n \sim \ln n$ (voir problème précédent).

Donc $\dfrac{1}{v_n}-n=\ln n+\dfrac{1}{v_0}+\mathrm{o}(\ln n)=\ln n+\mathrm{o}(\ln n)\sim\ln n$.

Or $\dfrac{1}{v_n}-n=\dfrac{n}{v_n}\left(\dfrac{1}{n}-v_n\right)\sim -t_n$ donc $t_n\sim-\dfrac{\ln n}{n}$.

Or pour tout $n\geqslant 3$, $\dfrac{\ln n}{n}\geqslant\dfrac{1}{n}\geqslant 0$ donc par comparaison des séries à termes positifs et divergence de la série harmonique, $\sum\dfrac{\ln n}{n}$ diverge puis par comparaison de séries à termes négatifs, $\boxed{\sum t_n \text{ diverge.}}$

2. Si $u_0\in\{-1,0\}$, alors $u_1=0$ et, par récurrence, $\boxed{\text{la suite est nulle à partir du rang } 1 \text{ au moins.}}$

3. Si $u_0<-1$, les variations de $x\mapsto x+x^2$ permettent de voir que $u_1>0$: $\boxed{\text{l'étude se ramène donc au cas } u_0>0.}$

4. On a toujours, pour $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}-u_n=u_n^2\geqslant 0$ donc (u_n) croît. Si elle a une limite, c'est le seul point fixe de $x\mapsto x+x^2$ par continuité, donc 0 mais comme pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n\geqslant u_0>0$, on aurait $0\geqslant u_0>0$ ce qui est contradictoire.
Par théorème de la limite monotone, on a donc $\boxed{u_n\to+\infty.}$
Puis $u_{n+1}=u_n+u_n^2=u_n^2+\mathrm{o}\left(u_n^2\right)$ donc $\boxed{u_{n+1}\sim u_n^2.}$

5. On calcule $P_{n+1}-P_n=\dfrac{1}{2^{n+1}}\ln\dfrac{u_{n+1}}{u_n^2}=\mathrm{o}\left(\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right)$, donc $\sum(P_{n+1}-P_n)$ converge absolument par comparaison à un terme général de série géométrique convergente, donc converge, donc $\boxed{(P_n)\text{ converge.}}$

6. Soient (x_n) et (y_n) les suites construites avec cette relation de récurrence avec $0<x_0\leqslant y_0$. Alors, par récurrence, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $x_n\leqslant y_n$ puis $\dfrac{\ln x_n}{2^n}\leqslant\dfrac{\ln y_n}{2^n}$ et donc $\lambda(x_0)\leqslant\lambda(y_0)$ avec des notations évidentes.
Ainsi, $\boxed{\lambda \text{ est une fonction croissante de } u_0.}$
Comme $u_n\to+\infty$, on a un rang N à partir duquel $u_n>1$. Puis, dans la question précédente, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $P_{n+1}-P_n\geqslant 0$, donc pour tout $n\geqslant N$, $P_n\geqslant P_N$ et en passant à la limite, $\boxed{\lambda\geqslant P_N>0.}$
Enfin, par concavité du $\ln$, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $P_{n+1}-P_n\leqslant\dfrac{1}{2^{n+1}u_n}\leqslant\dfrac{1}{2^n u_n}-\dfrac{1}{2^{n+1}u_{n+1}}$ en utilisant la formule de récurrence.
En sommant à partir du rang n, on obtient $\boxed{\lambda-P_n\leqslant\dfrac{1}{2^n u_n}.}$

7. Comme $u_n\to+\infty$, $\dfrac{1}{u_n}-\dfrac{1}{u_{n+1}}=\dfrac{1}{1+u_n}\sim\dfrac{1}{u_n}>0$ ce qui permet de voir que $\boxed{\sum\dfrac{1}{u_n}\text{ converge.}}$
Puis, comme $\dfrac{n+1}{u_{n+1}}-\dfrac{n}{u_n}=\dfrac{1-nu_n}{u_{n+1}}$, on a un rang à partir duquel $\dfrac{n+1}{u_{n+1}}-\dfrac{n}{u_n}\leqslant 0$ et, avec la question précédente,

$$\ln\left(\frac{n}{u_n}\right)<\frac{1}{u_n}+\ln n-\lambda 2^n\to-\infty$$

donc $\left(\dfrac{n}{u_n}\right)$ tend vers 0 en décroissant et par théorème spécial sur les séries alternées, $\boxed{\sum\dfrac{(-1)^n n}{u_n}\text{ converge.}}$

Fin