Devoir Libre n° 3

EXERCICE 1 (d'après CCINP)

On considère la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$ de la variable réelle et on note f sa somme.

1. Déterminer l'ensemble de définition D de f.
2. Démontrer que f est continue sur D.
3. Calculer la limite de f en $+\infty$.
4. Montrer que pour $x \in D$, $\displaystyle\int_0^A \mathrm{e}^{-x\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ tend vers une limite finie $\ell(x)$ à déterminer lorsque A tend vers $+\infty$.
5. Démontrer que pour tout $x\in D$, $\ell(x)\leqslant f(x)\leqslant 1+\ell(x)$.
6. En déduire un équivalent de f au voisinage de 0.

EXERCICE 2 (d'après E3A)

Partie A

Soit a un réel positif ou nul. On considère les **suites réelles** $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

$$a_0=a,\ b_0=1,\ a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2},\ b_{n+1}=\sqrt{a_nb_n}$$

1. Montrer que pour tout entier $n\geqslant 0$ on a
   (a) $a_n\geqslant 0$ et $b_n\geqslant 0$,
   (b) $a_{n+1}-b_{n+1}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{a_n}-\sqrt{b_n}\right)^2$.
2. En déduire que, pour tout entier $n\geqslant 1$, on a $0\leqslant b_n\leqslant b_{n+1}\leqslant a_{n+1}\leqslant a_n$.
3. Montrer que, pour tout entier $n\geqslant 1$, on a $\left(\sqrt{a_n}-\sqrt{b_n}\right)^2\leqslant a_n-b_n$ puis que, pour tout $n\geqslant 1$, on a $|a_n-b_n|\leqslant \frac{1}{2^n}|1-a|$.
4. En déduire que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes et convergent vers la même limite.

Partie B

Désormais $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désignent les **suites de fonctions** définies sur $[0,+\infty[$ en posant

$$\varphi_0(x)=x,\ \psi_0(x)=1,\ \varphi_{n+1}(x)=\frac{\varphi_n(x)+\psi_n(x)}{2}\quad\text{et}\quad \psi_{n+1}(x)=\sqrt{\varphi_n(x)\psi_n(x)}$$

4. Déduire de la partie A que les suites (φ_n) et (ψ_n) convergent simplement sur $[0,+\infty[$ vers une fonction f.
5. (a) Déterminer $f(0)$ et $f(1)$.
   (b) Montrer qu'on a $\sqrt{x}\leqslant f(x)\leqslant \frac{1+x}{2}$ pour tout x positif.
6. Soit A un réel strictement positif. Montrer que les suites de fonctions $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent uniformément sur $[0,A]$ vers f. (*On pourra utiliser la question* A (3)).
4. En déduire que la fonction f est continue sur $[0,+\infty[$.

PROBLÈME (algèbre linéaire)

1. Si x_1,x_2 et x_3 sont des réels distincts, on considère trois polynômes A_1, A_2 et A_3 tels que $\forall (i,j)\in\{1,2,3\}^2$, $\begin{cases} A_i(x_j)=0 \text{ si } i\neq j\\ A_i(x_i)\neq 0\end{cases}$
   Démontrer que la famille (A_1,A_2,A_3) est libre.
2. On pose $\begin{cases} Q_1 &=& \frac{1}{8}(X-5)(X-3)\\ Q_2 &=& \frac{-1}{4}(X-5)(X-1)\\ Q_3 &=& \frac{1}{8}(X-3)(X-1)\end{cases}$ Calculer $Q_i(1),Q_i(3)$ et $Q_i(5)$ pour $i\in\{1,2,3\}$.
3. En déduire que $\mathscr{C}=(Q_1,Q_2,Q_3)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
4. Déterminer la matrice M de passage de la base canonique $\mathscr{B}_c$ de $\mathbb{R}_2[X]$ à la base $\mathscr{C}$.
5. Démontrer que M est inversible et calculer son inverse.
6. On pose $Q_0=(X-5)(X-3)(X-1)$. On appelle u l'application qui à un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ associe son reste par la division euclidienne par Q_0. Montrer que $u\in\mathscr{L}(\mathbb{R}[X])$.
7. Déterminer l'image de u.
8. Déterminer le noyau de u.
9. Calculer u^2. Quelle est la nature de u ? Quels sont ses éléments caractéristiques ?
10. Démontrer que $u(P)=P(1)Q_1+P(3)Q_2+P(5)Q_3$.
11. Retrouver ainsi la matrice inverse de M.

On pose $N=\begin{pmatrix}3&2&0\\2&3&0\\0&0&3\end{pmatrix}$ et $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

12. Calculer $(N-5I)(N-3I)(N-I)$ puis tous les autres produits qu'on obtient en permutant les trois termes.
13. On note $F=\left\{aI+bN+cN^2\ ;\ a,b,c\in\mathbb{R}\right\}$. Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
14. Déterminer la dimension de F.
15. Pour tout polynôme $P=a+bX+cX^2$, on pose $P(N)=aI+bN+cN^2$ et on note Ψ l'application de $\mathbb{R}[X]$ dans F telle que $\Psi(P)=P(N)$. Montrer que Ψ est bien défini, est un morphisme d'algèbres et que sa restriction à $\mathbb{R}_2[X]$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.
16. On pose $C_i=Q_i(N)$ pour $i\in\{1,2,3\}$. En utilisant la question 10 et le résultat précédent, exprimer I,N et N^2 et plus généralement N^n pour $n\in\mathbb{N}$ sous forme d'une combinaison linéaire de C_1, C_2 et C_3.
17. Déduire de la question 12 la valeur des produits C_iC_j pour $i\neq j$.